

בני גורן

www.bennygoren.co.il

**מבחני
מתכונת
קיץ 2020
(5 יחידות לימוד)**

**שאלונים
581 ו- 582**



מבחני מתכונת קיץ 2020

5 יחידות לימוד

581 - השאלות בסוגריים ירדו במיקוד קיץ תשפ"ב - 2022

3	מתכונת 1 (שאלות שירדו : 2)
8	מתכונת 2 (שאלות שירדו : 1, 2)
13	מתכונת 3 (שאלות שירדו : 6ד)
18	מתכונת 4 (שאלות שירדו : 2, 6א(5) ב(2), 7ג, 8)
23	מתכונת 5 (שאלות שירדו : 7ג)
29	מתכונת 6 (שאלות שירדו : 6ב(3), 7ה)
35	מתכונת 7 (שאלות שירדו : 6)
41	מתכונת 8 (שאלות שירדו : -)
47	מתכונת 9 (שאלות שירדו : -)

582 - השאלות בסוגריים ירדו במיקוד קיץ תשפ"ב - 2022

53	מתכונת 1 (שאלות שירדו : 2ד(2), 3ג, 4, 5ב(4))
57	מתכונת 2 (שאלות שירדו : -)
62	מתכונת 3 (שאלות שירדו : 3ב, 5ג)
66	מתכונת 4 (שאלות שירדו : 3בג, 4גד)
70	מתכונת 5 (שאלות שירדו : -)
74	מתכונת 6 (שאלות שירדו : -)
79	מתכונת 7 (שאלות שירדו : -)
84	מתכונת 8 (שאלות שירדו : -)
89	מתכונת 9 (שאלות שירדו : -)

מתכונת מספר 1 – שאלון 581

נכתב על ידי סרור אסעד

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענו על שתיים מבין השאלות 1 – 3

- (1) המרחק מעיר A לעיר B הוא 200 ק"מ. רוכב קטנוע שיצא מעיר A לכיוון עיר B, עובר מרחק זה במשך 6 שעות. חלק מהדרך הוא עבר במהירות v_1 העולה על 15 קמ"ש, ואת שארית הדרך הוא עבר במהירות של v_2 . זמני התנועה של רוכב הקטנוע נמצאים ביחס ישר למהירויות תנועתו. לאחר 4 שעות של נסיעה, רוכב הקטנוע נמצא במרחק 120 ק"מ מהעיר A. א. קבעו איזו מן הטענות הבאות נכונה ונמקו את קביעתכם:
 (1) רוכב הקטנוע שינה מהירותו בשעה הרביעית לנסיעתו.
 (2) רוכב הקטנוע שינה מהירותו לפני השעה הרביעית לנסיעתו.
 ב. מצאו את המהירויות v_1 ו- v_2 בהן רוכב הקטנוע עבר את המרחק מ-A ל-B.
 ג. לאחר כמה שעות מיציאתו רוכב הקטנוע שינה את מהירותו?

- (2) נתונות שתי סדרות המקיימות את התנאים הבאים לכל n טבעי:

$$a_{n+1} = a_n + k \quad \text{ו} \quad b_n = a_n \cdot a_{n+1} \quad (k \text{ טבעי}).$$
 א. הוכיחו כי בסדרה a_n האיברים העומדים במקומות הזוגיים, וגם האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית.
 ב. הוכיחו: $b_{n+1} - b_n = 2k \cdot a_{n+1}$ לכל n טבעי.
 ג. הסדרה c_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי: $c_n = b_{n+1} - b_n$.
 (1) הוכיחו כי c_n היא סדרה חשבונית.
 (2) נתון: $a_1 = 1$. הביעו באמצעות k את c_1 .
 (3) נתון: $c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 - c_4^2 + \dots + c_{19}^2 - c_{20}^2 = -80 \cdot (42k^2 + 4k)$.
 מצאו את ערכו של k .

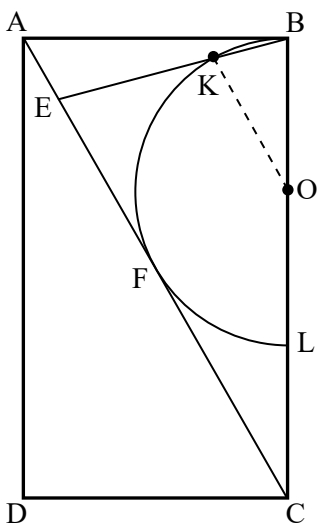
3 הטבלה הבאה מתארת התפלגות של 36 כדורים זהים בגודלם. הכדורים הם משלושה צבעים שונים (לבן, אדום ושחור), ונמצאים בכל אחד משלושה כדים א', ב' ו-ג':

כד	מס' כדורים לבנים	מס' כדורים אדומים	מס' כדורים שחורים
א'	6	5	1
ב'	4	4	4
ג'	2	3	7

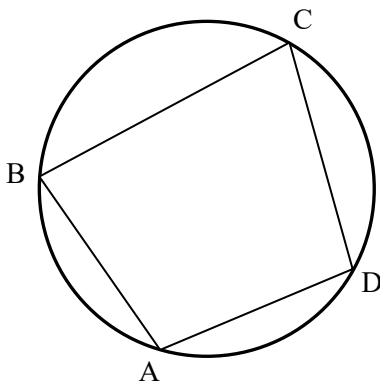
- א. בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו באקראי כדור. ידוע שהוצא כדור לבן. מהי ההסתברות שהוצא מכד א'?
- ב. שמים את כל 12 הכדורים הלבנים ואת כל 12 הכדורים האדומים בכד נפרד ללא הכדורים השחורים. מוציאים מכד זה באקראי שלושה כדורים, בזה אחר זה, ללא החזרה. ידוע שהכדור השני שהוצא היה לבן. מה ההסתברות שהכדור השלישי שהוצא היה אדום?
- ג. שמים את כל 36 הכדורים בכד אחד. מוציאים כדור אחד מכד זה. בודקים את צבעו ומחזירים אותו לכד. חוזרים על הניסוי 5 פעמים. ידוע שכלל לא הוצאו כדורים שחורים. מה ההסתברות שכלל לא הוצאו כדורים אדומים?

פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענו על אחת מבין השאלות 4 – 5



- 4 הצלע BC של מלבן ABCD, עוברת דרך מרכז חצי מעגל O. רדיוס חצי המעגל הוא R. האלכסון AC משיק לחצי המעגל בנקודה F. K היא נקודה הנמצאת על חצי המעגל. המשך BK חותך את האלכסון AC בנקודה E. נתון: $OB = R$, $CE = AD$, $AB = CF$.
- א. חשבו את זוויות המשולש BCE.
- ב. הוכיחו: $OK \parallel AC$.
- ג. הוכיחו: $BK = \frac{1}{3} \cdot BE$.
- ד. הביעו באמצעות R את שטח המלבן ABCD.



5) ABCD הוא מרובע החסום במעגל.

נתון:

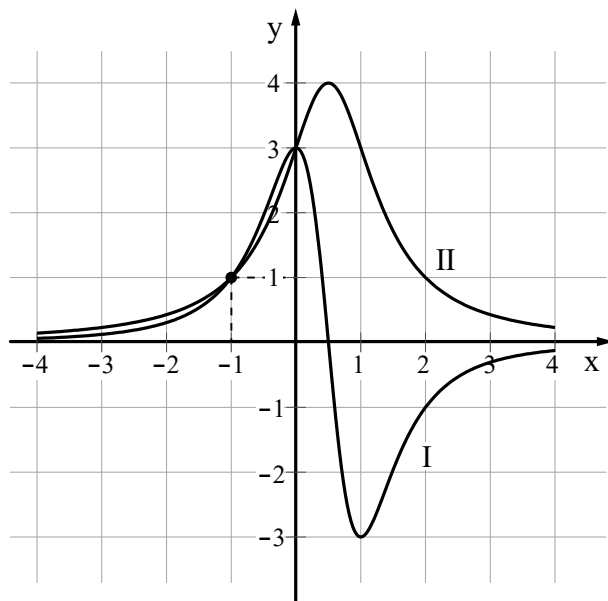
$AB = 2$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ

$\angle ABC = 60^\circ$, $S_{ABCD} = 4\sqrt{3}$ סמ"ר

- חשבו את הזווית $\angle ADC$.
- חשבו את שטח המשולש $\triangle ADC$.
- חשבו את היקף המרובע $ABCD$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות
ענו על שתיים מבין השאלות 6 – 8

6) בציור מתוארים שני גרפים: גרף I וגרף II. אחד מהגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$,



האחר הוא של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

שתי הפונקציות מוגדרות לכל x .

- קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה $f(x)$ ואיזה גרף מתאר את $f'(x)$. נמקו.
- מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = -1$.

ג. (1) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה \cup וכלפי מטה \cap של הפונקציה $f(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$.

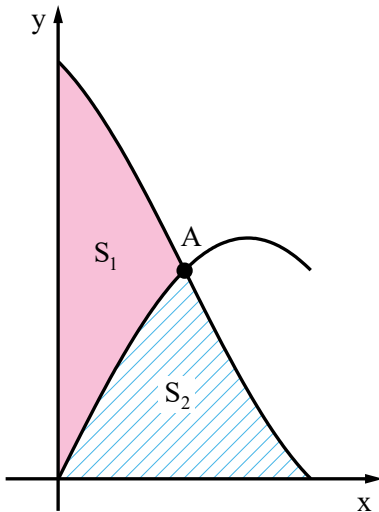
(4) חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^1 f'(x) dx$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g(x) = \int_{-1}^x [f'(x) - f(x)] dx$ בתחום $-1 < x < 0$.

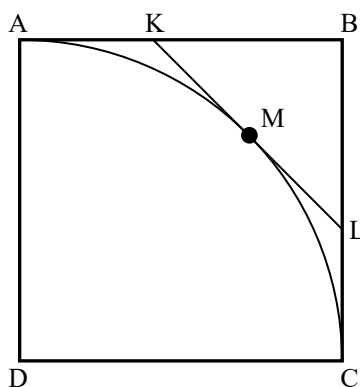
קבעו איזו מן הטענות הבאות נכונה:

- (1) הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה יורדת בתחום $-1 < x < 0$.
- (2) הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה עולה בתחום $-1 < x < 0$.
- (3) לא ניתן לקבוע אם הפונקציה $g(x)$ עולה או יורדת.

7 נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.



- א. הוכיחו כי קיימים שני פרמטרים a ו- b , כך שמתקיים $f(x) = a(1 + \cos 2x) + b \sin 2x$ ומצאו את ערכם.
- ב. גרף הפונקציה $g(x) = \sin(mx)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A , שהיא נקודת הפיתול שלה בתחום הנתון. מצאו את ערכו של m ($1 < m < 3$).
- ג. נסמן: S_1 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- y (השטח הורוד). S_2 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו). הוכיחו: $S_1 = S_2$.



- 8 בתוך ריבוע ABCD חסום רבע עיגול שרדיוסו R ומרכזו בנקודה D כמתואר בציור. M היא נקודה על הקשת של רבע המעגל החסום. דרך הנקודה M מעבירים משיק לרבע המעגל. המשיק חותך את צלעות הריבוע AB ו- BC בנקודות K ו- L בהתאמה.
- א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .
- ב. הביעו באמצעות R את שטח המשולש BKL כאשר KL בעל אורך מינימלי.
- ג. (1) הוכיחו, כאשר לקטע KL אורך מינימלי, הנקודה M נמצאת על האלכסון BD של הריבוע $ABCD$.
- (2) חשבו את היחס $\frac{BM}{DM}$.

תשובות למתכונת מספר 1 – שאלון 581

1 א. (2) . ב. 20 קמ"ש $v_1 =$, 40 קמ"ש $v_2 =$.

ג. שתיים.

2 ג. (2) $2k(k+1)$. (3) 2 .

3 א. $\frac{1}{2}$. ב. $\frac{12}{23}$. ג. $\frac{1}{32}$.

4 א. $\angle CBE = 75^\circ$, $\angle CEB = 75^\circ$, $\angle BCE = 30^\circ$.

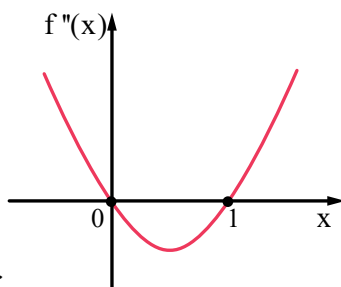
ד. $3\sqrt{3}R^2$.

5 א. $\angle ADC = 120^\circ$.

ב. $1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ סמ"ר .

ג. 12 ס"מ .

6 א. גרף II – $f(x)$, גרף I – $f'(x)$. כשגרף II מקבל ערך קיצון, גרף I חותך את ציר ה- x . ב. $y = x + 2$.



. (4) 0 .

ג. (1) $x=0$, $x=1$. (2) $x < 0$: \cup , $x > 1$: \cap , $0 < x < 1$. (3)

ד. (2) .

7 א. $b = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ב. 2 .

8 א. $2R(\sqrt{2}-1)$. ב. $0.1715R^2$. ג. $\sqrt{2}-1$ (2) .

מתכונת מספר 2 – שאלון 581

נכתב על ידי דוד צחור

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענו על שתיים מבין השאלות 1 – 3

- (1) שני צינורות, צינור I וצינור II, ממלאים יחד את כל הנפח של בריכה במים במשך 6 שעות (קצב הזרמת המים של כל אחד מהצינורות אינו משתנה). יום אחד צינור I מילא לבדו $\frac{1}{3}$ מנפח הבריכה ומיד לאחר מכן צינור II המשיך למלא לבדו עוד $\frac{1}{3}$ מנפח הבריכה. באופן זה $\frac{2}{3}$ מנפח הבריכה התמלא במשך m שעות.
- א. (1) הביעו באמצעות m את הזמן הדרוש לצינור I למלא את כל נפח הבריכה לבדו.
 (2) עבור אילו ערכים של m יש פתרון לשאלה?
- ב. ביום אחר, כאשר 60% מנפח הבריכה היה מלא במים, פתחו רק את צינור I והוא מילא לבדו את נפח הבריכה הנותר במשך 4 שעות.
- (1) מצאו את m במקרה זה.
 (2) עבור m שמצאתם, מצאו בכמה שעות צינור I ממלא לבד את כל נפח הבריכה.

- (2) נתונה סדרה הנדסית ובה $2n + 1$ איברים (n הוא מספר טבעי).
- א. הוכיחו כי מכפלת כל איברי הסדרה שווה לאיבר האמצעי שבה בחזקת $2n + 1$.
 כלומר: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2n+1} = k^{2n+1}$ כאשר k הוא האיבר האמצעי בסדרה.
- ב. נתון כי $a_1 = 1$ ו- $a_{2n+1} = 4096$.
 חשבו את האיבר האמצעי בסדרה.
- ג. בנוסף, נתון כי יש בסדרה 25 איברים. מצאו את מנת הסדרה, אם נתון כי הסדרה עולה.
- ד. ממשיכים את איברי הסדרה הנתונה עד אינסוף ויוצרים סדרה b_n חדשה על ידי: $b_n = \frac{1}{a_n}$.
 חשבו את היחס בין סכום כל איברי הסדרה b_n לבין סכום איבריה הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

3) בשכבה י"א יש שתי כיתות: י"א1 ו-י"א2.

בכיתה י"א1 יש 32 תלמידים ולמחציתם יש מחשב נייד.

בכיתה י"א2 יש 30 תלמידים ול-60% מהם יש מחשב נייד.

(הערה: אין קשר בין הסעיפים הבאים).

א. בחרו באקראי תלמיד משכבה י"א ונמצא שיש לו מחשב נייד.

מה ההסתברות שהוא לומד בכיתה י"א2?

ב. בחרו באקראי בזה אחר זה (בלי החזרה) 2 תלמידים מכיתה י"א1

ובאותו אופן בחרו 2 תלמידים מכיתה י"א2. מה ההסתברות של-2

תלמידים מכיתה י"א1 וגם ל-2 תלמידים מכיתה י"א2 אין מחשב נייד?

ג. בחרו באקראי בזה אחר זה (בלי החזרה) ארבעה תלמידים מכל השכבה.

מה ההסתברות שלכל הארבעה אין מחשב נייד?

ד. בחרו באקראי בזה אחר זה עם החזרה 4 תלמידים מכל השכבה.

מה ההסתברות שבדיוק ל-3 מהם יש מחשב נייד?

פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענו על אחת מבין השאלות 4 – 5

4) שני מעגלים שמרכזיהם הם M ו-O נחתכים בנקודות E ו-D.

הנקודה P נמצאת על המשך הקטע ED. PG משיק למעגל M

ו-PH משיק למעגל O. (ראו סרטוט).

א. הוכיחו כי $PG = PH$.

ב. בנוסף, נתון כי הקטע AM הוא קוטר של המעגל O.

נסמן ב-r את רדיוס המעגל M. הקטע AM חותך

את המיתר DE בנקודה B. הוכיחו כי:

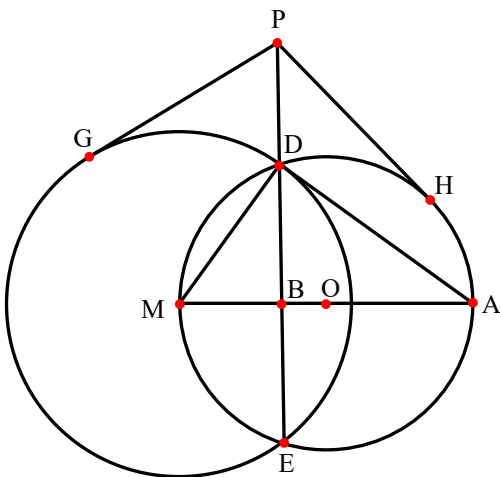
$$MB \cdot MA = r^2 \quad (1)$$

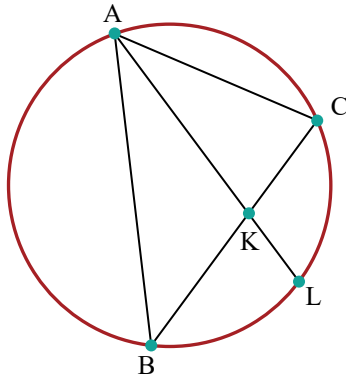
$$MB \cdot BA = BE^2 \quad (2)$$

$$\frac{MA}{BA} = \left(\frac{r}{BE}\right)^2 \quad (3)$$

ג. בנוסף, נתון כי $r = 5$ ס"מ ו- $DE = 8$ ס"מ.

חשבו את היחס בין שטח המשולש ADM לשטח המשולש ADB.





- 5) משולש ABC חסום במעגל. AK הוא חוצה הזווית A.
 המשכו של AK חותך ואת המעגל בנקודה L.
 נסמן: $BC = a$, $\beta = \angle ABC$, $\alpha = \angle CAB$.
 א. הוכיחו כי:

$$AK = \frac{a \cdot \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \quad (1)$$

$$KL = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \quad (2)$$

- ב. בנוסף, נתון כי $\alpha + \beta = 90^\circ$ ושטח המשולש AKC גדול פי 2 משטח המשולש LKC.
 חשבו את זוויות המשולש ABC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על שתיים מבין השאלות 6 – 8

6) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a > 0$.

א. מצאו והביעו באמצעות a (במידת הצורך) את:

- (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) אסימפטוטות המאונכות לצירים.
- (3) תחומי עליה וירידה (אם יש כאלה).
- (4) נקודות חיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).
- (5) סרטטו סקיצה של הגרף של $f(x)$.

ב. נגדיר פונקציה $g(x) = a \cdot f(x)$, $a > 0$. הביעו באמצעות a (במידת הצורך):

- (1) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?
- (2) מהם הערכים שהפונקציה $g(x)$ יכולה לקבל?
- (3) נתון $b > a$. נמקו מדוע $\int_b^{b+a} g(x) dx < a^2$.

(7) $f(x)$ היא פונקציה חיובית וגזירה בכל תחום ההגדרה שלה.

א. הראו שלפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ יש נקודות קיצון עבור אותם שיעורי ה- x , ונקודות הקיצון האלה הן מאותו סוג (מינימום או מקסימום).

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \cos x - \cos 2x + 4$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 (1) האם הפונקציה היא זוגית? או אי-זוגית? נמקו.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

(3) הסבירו מדוע גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה- x בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. גרף הפונקציה $f(x)$ הוזה ימינה ב- π כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

(1) הוסיפו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) בטאו את הפונקציה $g(x)$ בעזרת x . פשטו ככל האפשר.

ד. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה f , הצירים והישר $x = -\pi$.

הביעו בעזרת S את $\int_0^{2\pi} g(x) dx$. נמקו את תשובתכם.

ה. היעזרו בתשובתכם לסעיף א', מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x) = \sqrt{2 \cos x - \cos 2x + 4}$ וקבעו את סוגן.

(8) נתונה מקבילית ABCD.

נסמן: $AB = a$, $BC = b$, $\angle D = \alpha$.

הנקודות P ו-Q נמצאות על המשכי הצלעות DC ו-AD בהתאמה.

הקטע PQ עובר בנקודת B של המקבילית (ראו סרטוט).

נסמן ב- x את אורך הקטע DP.

א. (1) הביעו את אורך הקטע DQ בעזרת a , b ו- x .

(2) הביעו את שטח המשולש QDP בעזרת a , b ו- α .

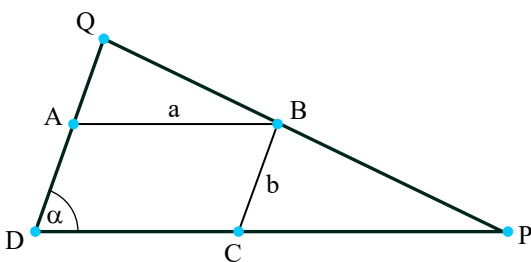
ב. (1) הביעו בעזרת a את אורך הקטע $x = DP$.

עבורו שטח המשולש QDP הוא מינימלי.

(2) הראו כי כאשר שטח משולש QDP מינימלי, אז שטח משולש זה גדול פי 2 משטח המקבילית הנתונה.

(3) כאשר שטח המשולש QDP הוא מינימלי, האם הישר עליו נמצא הקטע PQ חותך או מקביל לישר

עליו נמצא האלכסון AC? נמקו.



תשובות למתכונת מספר 2 – שאלון 581

(1) א. $t_1 = 1\frac{1}{2}m + \frac{3}{2}\sqrt{m^2 - 8m}$ או $t_1 = 1\frac{1}{2}m - \frac{3}{2}\sqrt{m^2 - 8m}$ (2) $m \geq 8$. ב. (1) $8\frac{1}{3}$ שעות. (2) 10 שעות.

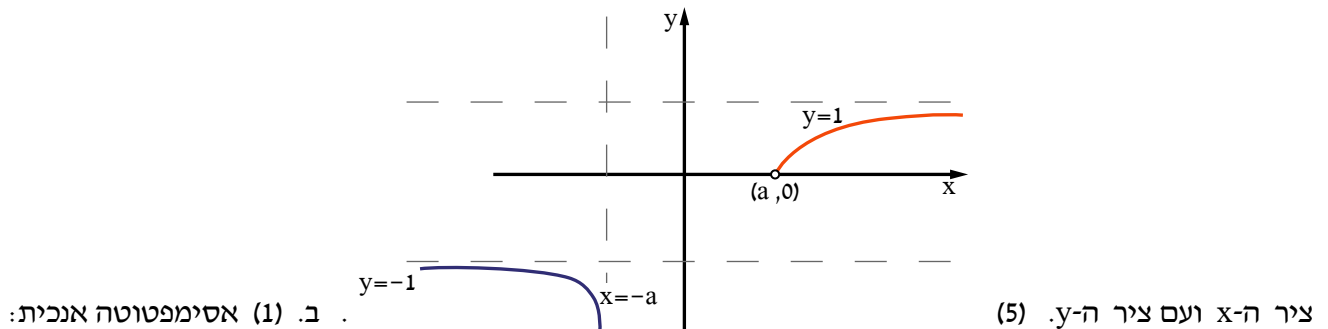
(2) ב. 64 . ג. $q = \sqrt{2}$. ד. $\frac{q+1}{q}$.

(3) א. $\frac{9}{17} \approx 0.529$. ב. $\frac{33}{899} \approx 0.036$. ג. 0.0367 . ד. 0.2979 .

(4) ג. $(\frac{5}{4})^2$.

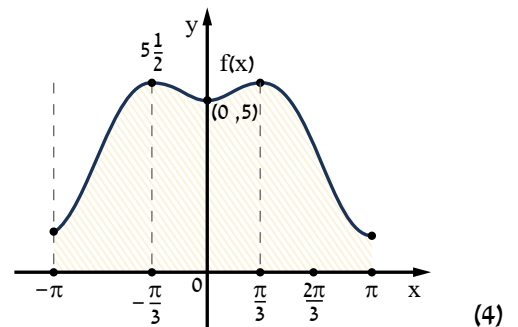
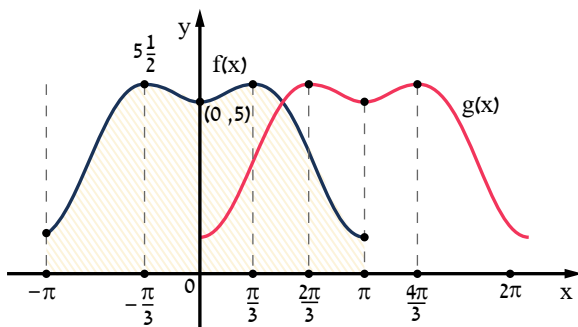
(5) ב. $60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$.

(6) א. (1) $x > a$ או $x < -a$ (2) $x = -a$ (3) עליה: $x > a$, ירידה: $x < -a$ (4) אין נקודות חיתוך עם



$x = -a$, אסימפטוטות אופקיות: $y = \pm a$ (2) $0 < g(x) < a$ או $-\infty < g(x) < -a$

(7) ב. (1) זוגית כי $f(x) = f(-x)$. (2) מקסימום: $(\pm\frac{\pi}{3}, 5\frac{1}{2})$, מינימום: $(\pm\pi, 1)$, $(0, 5)$.



(2) $g(x) = -2\cos x - \cos 2x + 4$. ד. $\int_0^{2\pi} g(x)dx = 2S$. ה. מקסימום: $(\pm\frac{\pi}{3}, \sqrt{\frac{11}{2}})$, מינימום: $(0, \sqrt{5})$, $(\pm\pi, 1)$.

(8) א. (1) $DQ = \frac{xb}{x-a}$ (2) $\frac{b \sin \alpha}{2} \left(\frac{x^2}{x-a} \right)$. ב. (1) $x = 2a$. ב. (3) מקביל.

מתכונת מספר 3 – שאלון 581

נכתב על ידי סרור אסעד

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענו על שתיים מבין השאלות 1 – 3

- (1) רוכב אופניים יצא בשעה 08:00 מישוב A לישוב B המרוחק ממנו 18 ק"מ. זמן מה אחריו יצא רוכב אופניים שני במהירות הגדולה ב-3 קמ"ש משל הראשון, גם הוא מהישוב A לישוב B. הרוכב השני השיג את הראשון לפני הגעתו לישוב B. לאחר הפגישה, הרוכב הראשון המשיך במהירות הגדולה ב-1 קמ"ש ממהירותו ההתחלתית. 54 דקות אחרי שהשיגו הרוכב השני, הגיע הרוכב הראשון לישוב B.
- א. מצאו באיזה תחום מספרים נמצאת מהירותו של הרוכב הראשון אם ידוע שהרוכב השני יצא לדרך אחרי השעה 08:15.
- ב. מבדיקה התברר שהרוכב השני יצא מהישוב A לישוב B בשעה 08:39.
- (1) חשבו את מהירות הרוכב הראשון לפני הפגישה.
- (2) מצאו באיזה מרחק מהישוב B אירעה הפגישה בין שני הרוכבים.
- (3) כתבו בכמה דקות הרוכב השני יקדים את הרוכב הראשון בהגעתו לישוב B.

- (2) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 2a_n \cdot n + a_n + 6n + 3$.
- א. הוכיחו שהסדרה שמוגדרת על ידי $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n + 3}$ היא סדרה חשבונית.
- ב. מהסדרה החשבונית b_n שהתקבלה מחקו את האיברים שבמקומות: 4, 8, 12, ... (כלומר נמחקו האיברים $(b_4, b_8, b_{12}, \dots)$. לאחר המחיקה נותרו 15 איברים. מצאו את מספר האיברים בסדרה b_n .
- ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנתרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2 . מצאו את a_1 .

- 3) ל-60% מבוגרי כיתה י"א מדעית בבית ספר מסוים יש תעודה טכנולוגית. מבין התלמידים שיש להם מחשב נייד, היחס בין בעלי תעודה טכנולוגית לאלה שאין להם תעודה טכנולוגית הוא 5 : 9. מבין התלמידים שיש להם תעודה טכנולוגית, היחס בין בעלי מחשב נייד לאלה שאין להם מחשב נייד הוא 1 : 3. בחרים באקראי תלמיד מהכיתה הנ"ל.
- א. מה ההסתברות שלתלמיד יש תעודה טכנולוגית וגם מחשב נייד?
- ב. ידוע שלתלמיד שנבחר אין מחשב נייד. מה ההסתברות שלתלמיד שנבחר אין תעודה טכנולוגית?
- ג. מספר התלמידים בכיתה הנ"ל הוא 20. מבין התלמידים שיש להם לפחות תעודה טכנולוגית או מחשב נייד בחרים באקראי 2 תלמידים. חשבו את ההסתברות שלאחד מהתלמידים יש רק תעודה טכנולוגית ולאחר יש רק מחשב נייד.

פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענו על אחת מבין השאלות 4 – 5

4) ABCD הוא ריבוע שצלעו AB היא קוטר של חצי מעגל.

הקודקוד C הוא מרכזו של רבע מעגל נוסף שרדיוסו $CB = R$.

המשך המיתר המשותף BF חותך את צלע הריבוע AD בנקודה E.

נתון: $CG \perp EB$.

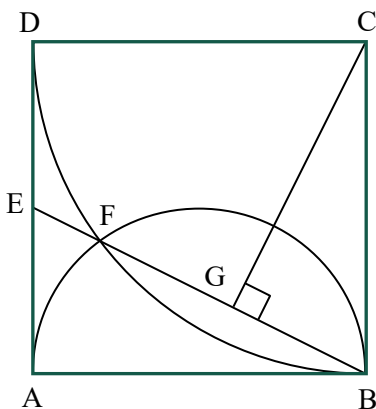
א. הביעו באמצעות R את רדיוס חצי המעגל שקוטר AB.

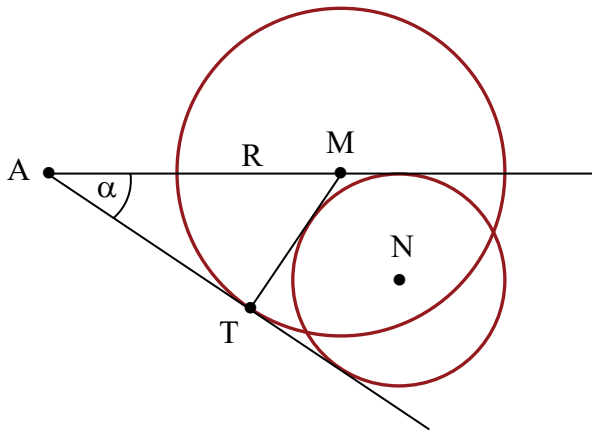
ב. נתון: $BG = 2$ ס"מ.

(1) חשבו את שטח הריבוע ABCD.

(2) חשבו את אורך הקטע EF.

(3) הראו כי $AE = ED$.





5) דרך נקודה A הנמצאת מחוץ למעגל שרדיוסו R ומרכזו M

מעבירים משיק AT (T היא נקודת ההשקה) וחותך העובר

דרך מרכז המעגל. מסרטטים מעגל שמרכזו N, ברדיוס r

המשיק לקטע MT ולהמשכי הישרים AM ו-AT (ראו ציור).

נתון: $\angle TAM = \alpha$.

א. הביעו באמצעות α במידת הצורך,

את זוויות המשולש NMT.

ב. הביעו את r באמצעות R ו- α .

ג. האם ייתכן שמתקיים: $R = 2r$? נמקו.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על שתיים מבין השאלות 6 – 8

6) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^4 + 6ax^2}{\sqrt{x^4 + 12x^2 + 36}}$ פרמטר $a > 0$

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו.

ג. לגרף הפונקציה $f(x)$, ברביע הראשון, העבירו משיק שמשוואתו $y = 4a(x - 1)$ המשיק לגרף הפונקציה

ברביע הראשון. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה-y שווה ל-2.

(1) מצאו את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

(2) חשבו את הערך של a.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{24 + x^3}}$. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכות בשתי נקודות.

(1) מצאו את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות בין שתי נקודות החיתוך שמצאתם.

(7) נתון כי הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מקיימות: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \frac{1}{2}$ ומוגדרות בתחום $-\pi < x < \pi$.

א. נתון: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. מצאו את הערך המספרי של $f(0)$.

ב. נתונה הנגזרת הראשונה של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = \frac{k^3 \sin x}{(k^2 + \cos x)^2}$ (k פרמטר).

חשבו את k עבורו האינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^3 \sin x}{(k^2 + \cos x)^2} dx$ הוא מקסימלי.

ג. עבור ערך ה- k שמצאתם בסעיף הקודם, נגדיר את הפונקציה

$g(x)$ על ידי: $g(x) = (k+1) \cdot f(x)$. בצויר שלפניך

מתוארים הגרפים של פונקציות הנגזרת הראשונה $g'(x)$

והנגזרת השנייה $g''(x)$ של הפונקציה $g(x)$.

(1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(2) קבעו איזה מן הגרפים I או II הוא הגרף של $g'(x)$

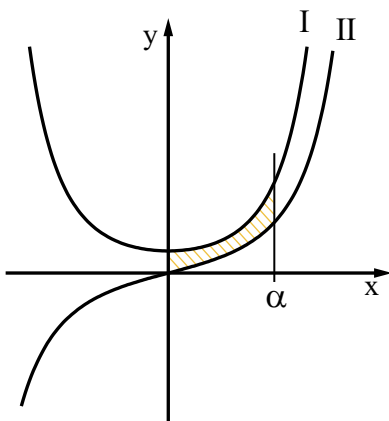
ואיזה של $g''(x)$. נמקו.

(3) כמה פתרונות יש למשוואה $g''(x) = 0$? נמקו.

ד. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה I, גרף הפונקציה II,

ציר ה- y והישר $x = a$ כאשר $0 < a < \pi$

(השטח המקווקו בצויר) שווה ל-1. מצאו את a .



(8) הישרים l_1 ו- l_2 מקבילים זה לזה והמרחק ביניהם הוא 1 ס"מ.

בין הישרים חסום משולש שווה צלעות ABC, כך

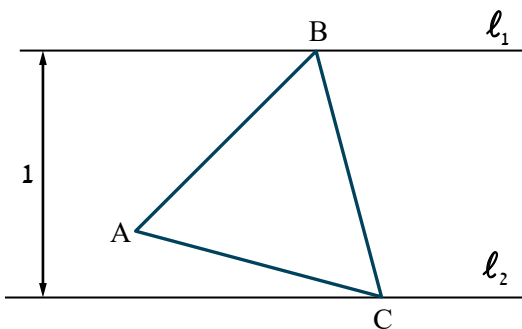
שקודקודיו B ו-C נמצאים על הישרים l_1 ו- l_2

בהתאמה. הקודקוד A נמצא במרחק a ס"מ מאחד

הישרים המקבילים (ראו צויר).

א. הביעו בעזרת a את אורך צלע המשולש ABC.

ב. מצאו את האורך המינימלי של צלע המשולש ABC.



תשובות למתכונת מספר 3 – שאלון 581

1 א. $0 < v < 9$

ב. (1) 6 קמ"ש. (2) 6.3 קמ"ש. (3) 12 דקות.

2 ב. 20.

ג. 0.

3 א. 0.45.

ב. $\frac{1}{2}$.

ג. $\frac{15}{136} \approx 0.11$.

4 א. $\frac{1}{2}R$.

ב. (1) 20 סמ"ר. (2) 1 ס"מ.

5 א. $\angle TMN = 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, $\angle MNT = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, $\angle MTN = 45^\circ$. ב. $r = \frac{R}{1 + \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}$. ג. לא ייתכן.

6 א. כל x.

ב. זוגית.

ג. (1) 2. (2) $\frac{3}{4}$.

ד. (1) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. (2) 0.202.

7 א. 2. ב. $k = 1$.

ג. (1) נקודת מינימום: (0,1). (2) פונקציה II. (3) אין פתרונות. ד. $a = \frac{\pi}{2}$.

8 א. $\sqrt{\frac{4}{3}a^2 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}}$.

ב. 1 ס"מ.

מתכונת מספר 4 – שאלון 581

נכתב על ידי דוד צחור

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענו על שתיים מבין השאלות 1 – 3

- (1) בוקר אחד, בשעה 08:00, יואב ודוד יוצאים מעיר א' לעיר ב'. יואב עובר את כל הדרך בין הערים במשך שעה וחצי במהירות קבועה הגדולה מ-50 קמ"ש. דוד עובר 30% מהדרך במהירות הקטנה ב-6 קמ"ש ממהירותו של יואב. ביתרת הדרך דוד ממשיך במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירותו של יואב ולכן הגיע לעיר ב' 6 דקות לפני יואב.
- א. (1) מהי מהירותו של יואב?
 (2) מהו המרחק בין שתי הערים?
 (3) בכמה זמן עבר דוד 30% מהמרחק בין שתי הערים?
- ב. באיזו שעה דוד ויואב נפגשים?
- ג. כעבור כמה זמן מתחילת הנסיעה ובאיזו שעה המרחק בין דוד ויואב הוא 5 ק"מ? שימו לב כי קיימות מספר אפשרויות. הבחינו בין המקרים ומצאו את האפשרות הנכונה.

- (2) הסדרה a_1, a_2, a_3, \dots היא סדרה חשבונית שהפרשה הוא d.

א. הביעו את $a_{10n+1} - a_{10n-9}$ בעזרת d עבור כל n טבעי.

ב. מגדירים סדרה חדשה A_1, A_2, A_3, \dots על ידי:

$$A_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$$

$$A_2 = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}$$

$$A_3 = a_{21} + a_{22} + \dots + a_{30}$$

⋮

$$A_n = a_{10n-9} + a_{10n-8} + \dots + a_{10n}$$

הוכיחו כי הסדרה A_1, A_2, A_3, \dots היא סדרה חשבונית ורשמו את הפרשה בעזרת d.

ג. נתון כי מספר האיברים בסדרה חשבונית הוא 30. סכום 10 האיברים הראשונים הוא 235

וסכום 10 האיברים האחרונים הוא 1235.

(1) חשבו את סכום כל איברי הסדרה.

(2) מצאו את הפרש הסדרה d.

- 3) במדגם טלפוני לבידוק רצון הורים להקמת גן משחקים בשכונה השתתפו גברים ונשים. אחוז התומכים בהקמת הגן היה גבוה פי 3 מאחוז המתנגדים לבנייתו. אחוז הגברים שהשתתפו במדגם היה נמוך ב-20% מאחוז הנשים שהשתתפו במדגם. אחוז המתנגדים להקמת הגן מבין הנשים זהה לאחוז המתנגדים להקמתו מבין הגברים.
- א. (1) חשבו את ההסתברות לבחור מכלל המשתתפים במדגם גבר התומך בבנייה.
 (2) חשבו את ההסתברות לבחור אישה מבין המתנגדים לבניית הגן.
- ב. קבעו האם המאורעות "בחירת אישה" ו"בחירת מתנגד/ת לבניית הגן" הם מאורעות תלויים או בלתי תלויים. נמקו.
- ג. נתון כי רק 26 מבין כלל הנדגמים היו גברים שהתנגדו לבניית הגן. כמה נשים תומכות בבנייה נדגמו בסקר?

פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענו על אחת מבין השאלות 4 – 5

- 4) נתון משולש ABC ובו: $DE \parallel BC$.

אלכסוני המרובע DECB נפגשים בנקודה O.

דרך הנקודה O מעבירים ישר, המקביל לצלע BC,

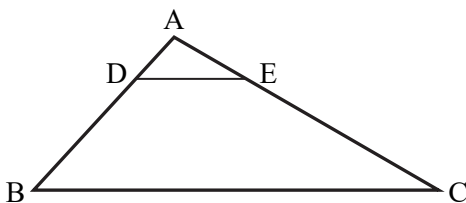
וחותך את הצלע AB בנקודה M ואת הצלע AC בנקודה N.

א. הוכיחו כי $OM = ON$.

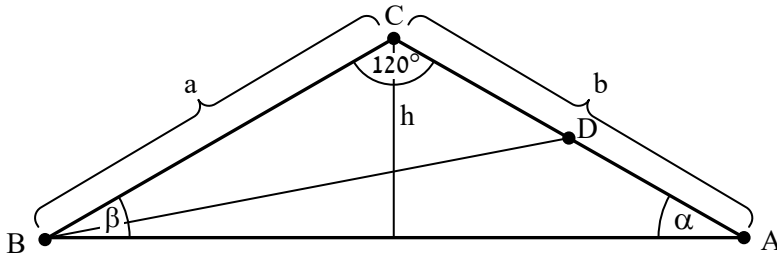
בנוסף נתון כי שטח המרובע DECB גדול פי 8 משטח המשולש ADE.

ב. (1) חשבו את היחס $\frac{DE}{BC}$.

(2) הוכיחו כי הנקודה M היא אמצע הצלע AB והנקודה N היא אמצע הצלע AC.



5 במשולש ABC נתון כי $\angle C = 120^\circ$.



נסמן את הצלעות הכולאות זווית זו ב- a ו- b ,

את הגובה לצלע השלישית ב- h , את הזווית

מול b ב- β ואת הזווית מול a ב- α .

א. (1) הביעו את הצלעות a ו- b

בעזרת h , α ו- β .

(2) הוכיחו כי אם מתקיים $h = \frac{ab}{a+b}$ אז המשולש ABC הוא שווה-שוקיים.

ב. נסמן ב- D את אמצע השוק AC של המשולש שווה השוקיים.

חשבו את היחס בין אורך הקטע BD לבין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על שתיים מבין השאלות 6 – 8

6 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

א. מצאו:

(1) תחום הגדרה.

(2) תחומי עלייה/ירידה (אם יש).

(3) אסימפטוטות מאונכות לצירים.

(4) סרטטו את גרף הפונקציה.

(5) חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישרים $x=1$, $x=-1$ וציר ה- x .

ב. פונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x-1)$.

(1) הוסיפו לסרטוט של סעיף א' את גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $g(x)$, ציר ה- y והישר $x=1$. נמקו.

ג. הפונקציה $h(x)$ מוגדרת על-ידי $h(x) = [f(x)]^n$ כאשר n הוא מספר טבעי אי זוגי.

(1) מהם תחומי העלייה והירידה (אם יש) של הפונקציה $h(x)$? נמקו.

(2) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $h(x)$? נמקו.

7 נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.

א. (1) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) מצאו את נקודות הקיצון.

(3) סרטטו את גרף הפונקציה.

(4) מגדירים פונקציה $g(x)$ על-ידי $g(x) = f(x) + m$.

עבור אילו ערכי m גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x ? נמקו.

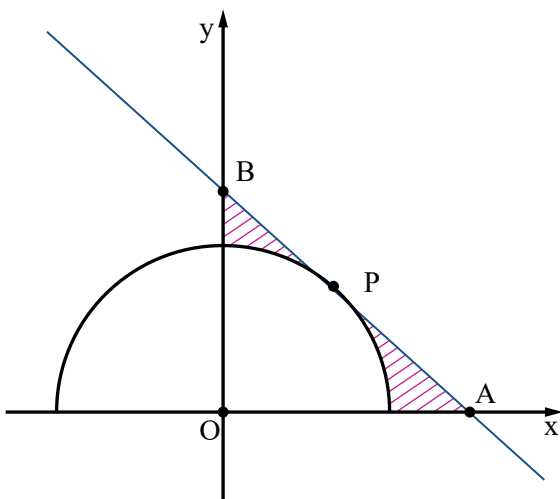
ב. (1) הוסיפו לגרף מסעיף א' (3) את גרף הפונקציה $h(x) = |\sin x + \cos x|$ בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.

(2) הראו כי לכל x מתקיים $f(x - \pi) = -f(x)$.

(3) נסמן ב- S את האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx$. היעזרו בסעיפים הקודמים והבע בעזרת S את $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} h(x) dx$. נמקו תשובתכם.

ג. מסובבים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין ציר ה- x סביב ציר ה- x .

חשבו את נפח גוף הסיבוב המתקבל.



8 בסרטוט, מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה P . המשיק לגרף

הפונקציה בנקודה P חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת

ציר ה- y בנקודה B .

א. הביעו את משוואת המשיק בעזרת t .

ב. הביעו בעזרת t את שטח המשולש הנוצר על ידי

המשיק והצירים.

ג. מצאו עבור איזה ערך של t שטח המשולש הנוצר

על ידי המשיק והצירים הוא מינימלי.

ד. עבור איזה ערך של t השטח המוגבל על ידי הישר,

הצירים וגרף הפונקציה (השטח המקווקו בסרטוט) הוא מינימלי? נמקו.

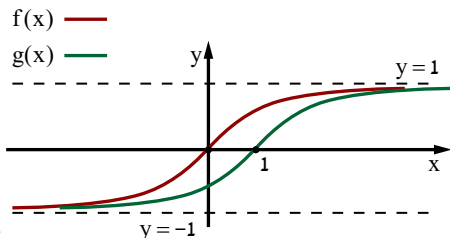
תשובות למתכונת מספר 4 – שאלון 581

1 א. (1) 60 קמ"ש. (2) 90 ק"מ. (3) בחצי שעה. ב. 8:48. ג. כעבור 78 דקות מתחילת הנסיעה; דוד מקדים את

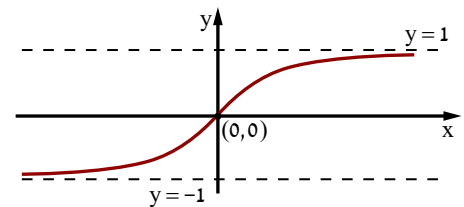
יואב ב-5 ק"מ. א. 10d. ג. (1) 2,205. (3) 5. א. (1) 0.3. (2) 0.6. המאורעות בלתי תלויים. ג. 117.

4 ב. (1) $\frac{1}{3}$. א. (5) $a = \frac{h}{\sin \beta}$, $b = \frac{h}{\sin \alpha}$. ב. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

6 א. (1) כל x. (2) תחום עלייה: כל x, תחום ירידה: אין. (3) $y = 1$, $y = -1$.



(1) ב. (5) 0.828

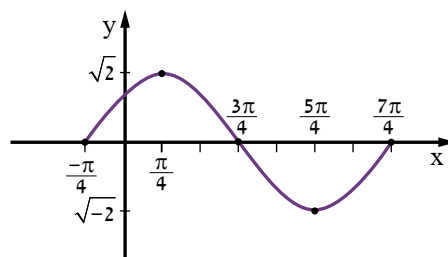


(4)

(2) $2(\sqrt{2}-1)$. ג. (1) תחום עלייה: כל x, תחום ירידה: אין. (2) $y = 1$, $y = -1$.

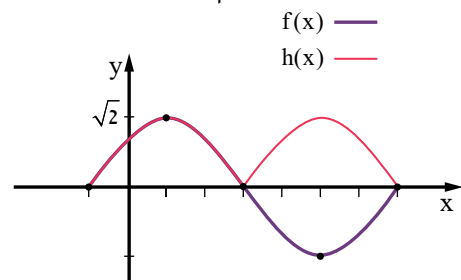
7 א. חיתוך עם ציר ה-y: $(0,1)$, חיתוך עם ציר ה-x: $(-\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{3\pi}{4}, 0)$, $(\frac{7\pi}{4}, 0)$. (2) נקודת מינימום פנימית:

$(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2})$, נקודת מקסימום פנימית: $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$, נקודת מקסימום בקצה תחום ההגדרה: $(\frac{7\pi}{4}, 0)$, נקודת מינימום



(4) $m = \sqrt{2}$ או $m = -\sqrt{2}$.

בקצה תחום ההגדרה: $(-\frac{\pi}{4}, 0)$. (3)



ב. (1)

(3) 2S. ג. $2\pi^2 \approx 19.739$

8 א. $y\sqrt{4-t^2} + tx - 4 = 0$. ב. $\frac{8}{\sqrt{4t^2-t^4}}$. ג. עבור $t = \sqrt{2}$. ד. עבור $t = \sqrt{2}$.

מתכונת מספר 5 – שאלון 581

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים. יש לענות על 5 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
 (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 (2) דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות:
 (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה

מתכונת מספר 5 – שאלון 581

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

- (1) משאית, מכונית ואופנוע יצאו בזה אחר זה מאשקלון לקיבוץ דגניה דרך תל אביב. המשאית יצאה ראשונה, לאחר a דקות יצאה המכונית ולאחר a דקות נוספות יצא האופנוע. כלי הרכב הגיעו לתל אביב באותו הזמן, ומיד המשיכו לדגניה, הנמצאת במרחק של 120 ק"מ מתל אביב. המשאית הגיעה לדגניה שעה לאחר הגעת המכונית. האופנוע הגיע לדגניה, מיד הסתובב וחזר באותה הדרך בה הגיע, ופגש את המשאית בדרכה לדגניה, במרחק 40 ק"מ מדגניה. מהירויות כלי הרכב לא השתנו במהלך הנסיעה.
- א. מצא באיזו מהירות נסע כל אחד מכלי הרכב.
- ב. באיזה מרחק מדגניה פגש האופנוע את המכונית, בדרכו חזרה מדגניה?
- ג. כמה דקות אחרי פגישת האופנוע והמכונית, כמתואר בסעיף ב' פגש האופנוע את המשאית?

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{10}{7} \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{5 - 2a_n} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{סדרה מוגדרת לכל } n \text{ טבעי על ידי הכלל:} \\ \text{נגדיר סדרה חדשה: } b_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2} \end{array}$$

- א. הוכח כי הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
- ב. נסמן: $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$. בטא את T כפונקציה של n .
- ג. נתון כי עבור k טבעי כלשהו מתקיים $a_k = \frac{2}{6251}$.
- מצא את סכום k האיברים הראשונים בסדרת ה- b_n .
- ד. חשב את הסכום: $\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} - \frac{1}{b_4} \dots$

3) מנתונים שנאספו מרשת סופרמרקטים מתברר כי ההסתברות שלקוח ישלם תמורת

הקנייה בכרטיס אשראי גדולה פי $\frac{21}{4}$ מההסתברות שישלם במזומן.

$\frac{3}{5}$ מהלקוחות המשלמים באשראי קונים בסכום העולה על 1000 ש"ח.

ידוע כי ההסתברות שלקוח יבצע קניה בסכום העולה על 1000 ש"ח היא 0.536.

א. בוחרים באקראי לקוח ששילם במזומן.

מה ההסתברות שקנייתו הסתכמה בסכום העולה על 1000 ש"ח?

ב. בוחרים באקראי 6 קונים, אחד מהם שילם במזומן והאחרים באשראי.

(1) מה ההסתברות שבדיוק 4 מבין הלקוחות ששילמו באשראי, שילמו יותר מ-1000 ש"ח?

(2) מה ההסתברות שרק הלקוח ששילם במזומן, שילם סכום שאינו עולה על 1000 ש"ח?

ג. ידוע שרק אחד מהלקוחות מתוך השישה של סעיף ב' שילם סכום שאינו עולה על 1000 ש"ח.

מה ההסתברות שהיה זה הלקוח ששילם במזומן?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) נתון: המרובע ABCD הוא טרפז שאלכסונו נחתכים בנקודה O.

נסמן: $S_{\Delta BOC} = S_1$, $S_{\Delta AOD} = S_2$.

העבירו דרך נקודה O את h_1 ו- h_2 שהם גבהי

המשולשים BOC ו-AOD בהתאמה כמתואר בציור.

א. הוכח כי: $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$.

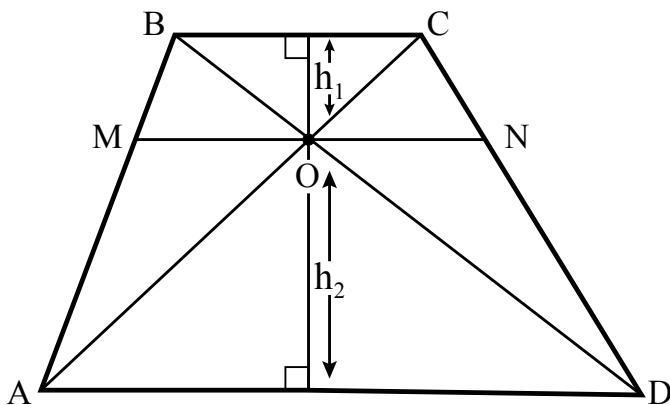
ב. הבע באמצעות S_1 ו- S_2 את שטח הטרפז ABCD.

ג. דרך נקודה O עובר מקביל לבסיסי הטרפז,

מקביל זה חותך את AB בנקודה M ואת CD בנקודה N.

(1) הראה כי $MO = ON$.

(2) הראה כי $MN = \frac{2BC \cdot AD}{BC + AD}$.



5) אחת הזוויות של משולש היא בת 120° והצלעות הכולאות זווית זו הן a ו- b .

הגובה לצלע השלישית הוא h .

א. הוכח: אם $h = \frac{ab}{a+b}$ אז המשולש הוא שווה שוקיים.

ב. בתנאים של סעיף א':

(1) בטא את שטח המשולש באמצעות h בלבד.

(2) מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום במשולש לבין רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

פרק שלוש – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

א. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

(1) תחום הגדרה.

(2) נקודות קיצון וסוגן.

(3) תחומי עליה וירידה.

(4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה משוואה: $x^3 - K \cdot x + 2K = 0$.

לאילו ערכי K יש למשוואה:

(1) פתרון יחיד.

(2) פתרונות.

(3) פתרונות.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x-2)$ סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. נמק

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{2x-m}}{2x+m}$, $m > 0$

ענה על הסעיפים הבאים והבע תשובותיך בעזרת m לפי הצורך:

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.

(3) מצא את נקודת הקיצון ורשום תחומי עלייה וירידה.

(4) מצא את אסימפטוטות לגרף הפונקציה.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. קבע בעזרת נימוקים מתאימים אם הטענות הבאות נכונות או לא:

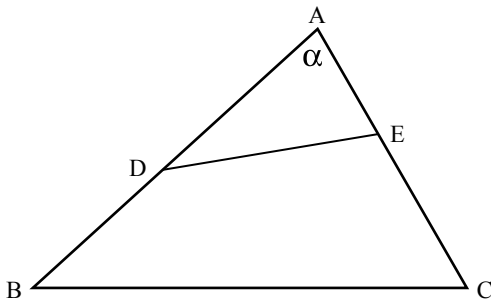
(I) לפונקציה: $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ יש אסימפטוטה אנכית.

(II) לישר: $y = \frac{\sqrt{m}}{4m}$ יש שתי נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$.

(III) לפונקציה $g(x) = -f(x)$ יש תחומי עלייה זהים לאלו של $f(x)$.

(IV) עבור $m > 0$ מתקיים $0 \leq \frac{\sqrt{2x-m}}{2x+m} \leq \frac{\sqrt{2m}}{4m}$.

ג. בטא בעזרת m את השטח המוגבל על ידי $f'(x)$ וציר ה- x בתחום $m \leq x \leq 1.5m$.



(8) במשולש ABC נתון: $\angle BAC = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$.

נקודות D ו-E נמצאות על AB ו-AC בהתאמה כך ששטח

המרובע BCED הוא $\frac{3}{4}$ משטח המשולש ABC.

א. הוכח כי האורך המינימלי של ED הוא: $\sqrt{bc} \sin \frac{\alpha}{2}$.

ב. נתון כעת בנוסף כי המרובע BCED הוא בר חסימה במעגל.

הוכח כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

תשובות למתכונת מספר 5 – שאלון 581

1 א. מהירות המשאית - 30 קמ"ש, מהירות המכונית - 40 קמ"ש, מהירות האופנוע - 60 קמ"ש. ב. 24 ק"מ.

ג. 16 דקות.

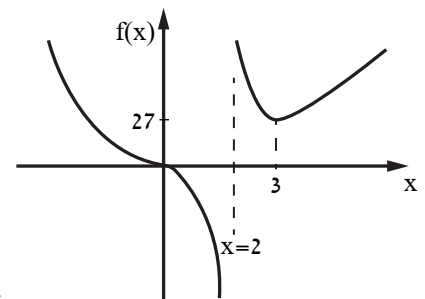
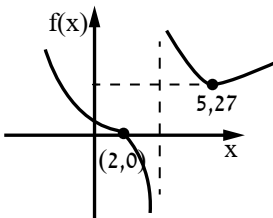
2 א. $q=5$ ב. $T = \frac{5^n - 1}{20} + \frac{1}{2}n$ ג. $S_7 = 3906\frac{1}{5}$ ד. $S_\infty = \frac{25}{6}$

3 א. $P=0.2$ ב. $P=0.2592$ (1) $P=0.0622$ (2) ג. $P=0.545$

4 ב. $S_{ABCD} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

5 ב. $S_\Delta = \sqrt{3}h^2$ ג. 0.232

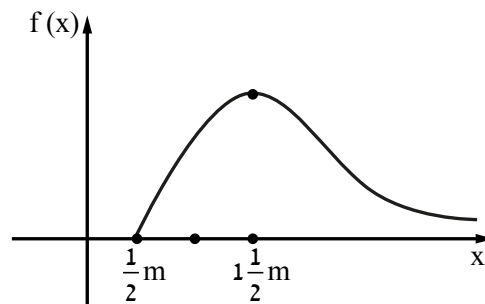
6 א. (1) $x \neq 2$ (2) (3,27) מינימום. (3) עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 \neq x < 3$ (4) $x = 2$



ג. ב. (1) $K < 27$ (2) $K = 27$ (3) $K > 27$

(5)

7 א. (1) $x \geq \frac{m}{2}$ (2) $(\frac{m}{2}, 0)$ (3) $(1.5m, \frac{\sqrt{2m}}{4m})$ מקסימום, $(\frac{m}{2}, 0)$ מינימום קצה, עלייה: $\frac{1}{2}m < x < 1\frac{1}{2}m$



ב. (I) טענה נכונה. (II) טענה

ירידה: $x > 1\frac{1}{2}m$ (4) $y=0$ (5)

נכונה. (III) טענה לא נכונה. (IV) טענה נכונה. (2) $S = \frac{0.02\sqrt{m}}{m}$

מתכונת מספר 6 – שאלון 581

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים. יש לענות על 5 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה

מתכונת מספר 6 – שאלון 581

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

- (1) רוכב אופניים יוצא מתל אביב למושבה כנרת, בו זמנית יוצא מהמושבה שליח על גבי אופנוע אשר נוסע לת"א, מיד שב לכנרת ומיד שב לת"א. השליח חולף על פני רוכב האופניים לראשונה אחרי שעתיים של נסיעה. הפגישה השלישית ביניהם מתקיימת במרחק 40 ק"מ מכנרת, כאשר השליח בדרכו חזרה לת"א. משך הזמן שחלף בין הפגישה הראשונה לשנייה שווה למשך הזמן שחלף בין הפגישה השנייה לשלישית. א. חשב את המרחק בין תל אביב למושבה כנרת. ב. חשב את מהירויות השליח ורוכב האופניים. ג. השליח טוען כי הפגישה השנייה בינו לבין רוכב האופניים התרחשה אחרי שהוא עבר את מחצית המרחק בין ת"א למושבה כנרת, האם טענתו נכונה? נמק.

- (2) הסכום של סדרה הנדסית אינסופית יורדת a_1, a_2, a_3, \dots שכל איבריה חיוביים ומנתה q היא S . נתון: $T = (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots)^2$, $T > S$. א. הבע את המנה q באמצעות T ו- S . ב. מצא את q אם נתון: $T = 5S$. ג. הבע באמצעות S את הסכומים הבאים:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots \quad (1)$$

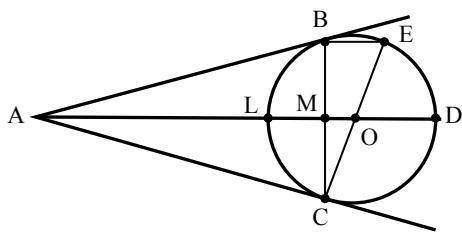
$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots \quad (2)$$

3) נתונות הספרות 4, 3, 2, 1. הרכיבו מהספרות הנ"ל את כל המספרים הדו ספרתיים האפשריים.

- א. בוחרים באקראי מבין המספרים הנ"ל מספר אחד. מה ההסתברות שהמספר הוא 21?
- ב. בוחרים באקראי מבין המספרים הנ"ל שני מספרים בזה אחר זה (ללא החזרה) מה ההסתברות שאחד מהמספרים הוא 21?
- ג. בוחרים באקראי מבין המספרים הנ"ל שלושה מספרים בזה אחר זה (ללא החזרה). ידוע שבכל שלושת המספרים שנבחרו שתי הספרות שונות זו מזו. מה ההסתברות שאחד מהמספרים הוא 21?
- ד. בוחרים באקראי מבין המספרים הנ"ל n מספרים עם החזרה. הבע באמצעות n את ההסתברות שיתקבל בדיוק פעם אחת מספר שמכפלת ספרותיו מתחלקת ב-3 ללא שארית.

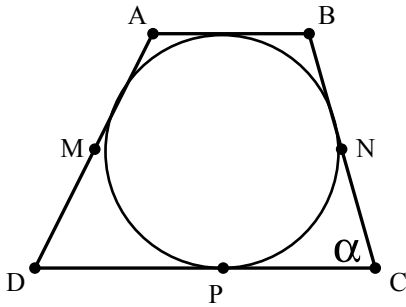
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) מהנקודה A יוצאים שני משיקים AB ו-AC למעגל שמרכזו O, CE הוא קוטר המעגל.



- א. הוכח כי הקטע EB מקביל לישר DA.
- ב. הוכח שהנקודה L היא מרכז המעגל החוסם ב- $\triangle ABC$.
- ג. נתון: $\angle ABC = 60^\circ$, R רדיוס המעגל שמרכזו O. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC.
- ד. הוכח כי: $AB^2 = AL \cdot AD$ והשתמש בעובדה זו כדי לבטא את AB במונחי R.
- ה. מצא את היחס בין שטח המשולש ABL לבין שטח המשולש BLM.

5 נתון: ABCD טרפז שווה שוקיים, זווית הבסיס $\angle C = \alpha$ ($\alpha < 90^\circ$).



בטרפז חסום מעגל שרדיוסו R.

א. הוכח: $\frac{AB}{CD} = \left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)^2$.

ב. ידוע כי שטח הטרפז הוא $8R^2$. חשב את זווית α .

ג. נסמן: M אמצע AD, N אמצע BC, P נקודת ההשקה של

המעגל עם הבסיס התחתון.

בטא את שטח המשולש MNP באמצעות R.

פרק שלוש – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

6 נתונה $f(x)$ המקיימת: $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

א. הוכח כי: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x)$.

ב. נתון: $g(x) = 4f(x)$.

(1) האם $g(x)$ היא פונקציה זוגית או פונקציה אי זוגית? נמק.

(2) מהי המחזוריות של גרף הפונקציה $g(x)$?

ג. (1) בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ מצא נקודת קיצון של $g(x)$.

(2) לאילו ערכי a הפונקציה $h(x) = g(x) + a$ משיקה לציר ה-x? נמק.

ד. נגדיר: $p(x) = -g(x)$. סרטט סקיצה של $p(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

ה. נגדיר: $m(x) = g(x) \cdot g'(x)$. חשב: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} m(x) dx$.

7 נתונה פונקציה: $f(x) = \sqrt{b^2 - x^2}$, $b > 0$.

א. היעזר ב- b לפי הצורך וציין את:

(1) תחום ההגדרה. (2) נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) נקודת קיצון וסוגן. (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. מנקודה מימין לציר ה- y (נסמנה - C) שעל הגרף של $f(x)$ מעבירים אנכים לצירים.

האנך לציר ה- x חותך את הציר בנקודה B , האנך לציר ה- y חותך את הציר בנקודה A . O ראשית הצירים.

(1) בטא באמצעות b את שיעורי נקודה C בה מתקבל שטח מקסימלי למרובע $OACB$ הנוצר באופן זה.

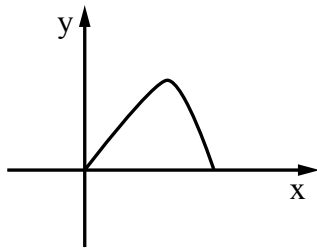
(2) ידוע כי השטח המקסימלי של מרובע $OACB$ שנוצר באופן זה הוא 2. מצא את b .

(3) לפיך גרף המתאים לתיאור פונקציית השטח של המרובעים $OACB$

כאשר הנקודה C שעל הגרף מימין לציר ה- y . סרטט את הגרף שיתאר

את פונקציית השטח של המרובעים $OACB$ כאשר הנקודה A

נמצאת משמאל לציר ה- y . הסבר.



ג. נגדיר: $g(x) = f^2(x)$. ידוע כי: $\int_{-b}^b g(x) dx = 36$. מצא את b .

8 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(x-1)^3}{ax+b}$, $a > 0$, $b < 0$. הישר $x = 4$ הננו אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

המרחק בין נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים הוא: $\frac{1}{4}\sqrt{17}$.

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן, אם ישנן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. קבע אם הטענות הבאות נכונות או לא ונמק:

(1) למשוואה: $\frac{(x-1)^3}{x-4} = 70$ יש שלושה פתרונות x_1, x_2, x_3 המקיימים $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > 0$.

(2) $\int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{8}$

(3) לפונקציה: $g(x) = f(x) + k$ קיים רק ערך אחד של k עבורו היא משיקה לציר ה- x .

תשובות למתכונת מספר 6 – שאלון 581

1 א. המרחק בין ת"א למושב כנרת: 160 ק"מ. ב. מהירות השליח: 60 קמ"ש, מהירות האופניים: 20 קמ"ש.

ג. הטענה איננה נכונה, הפגישה השנייה התרחשה בדיוק באמצע הדרך בין ת"א למושב כנרת.

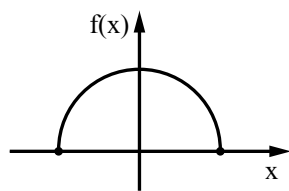
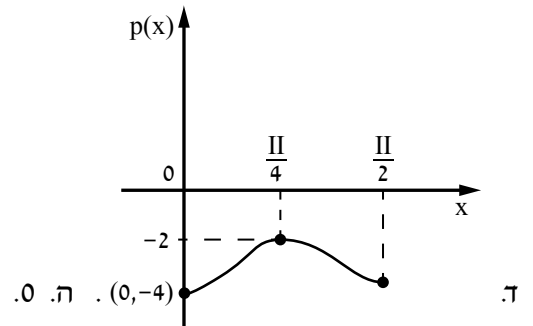
2 א. $\left(\frac{T-S}{T+S}\right)^2$. ב. $\frac{4}{9}$. ג. $\frac{5S^2}{13}$ (1) . $\sqrt{5S}$ (2)

3 א. $\frac{1}{16}$. ב. $\frac{1}{8}$. ג. $\frac{1}{4}$. ד. $\frac{7}{16}n \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$

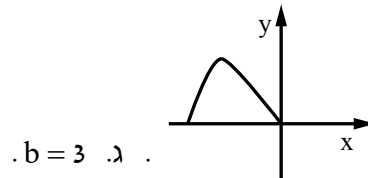
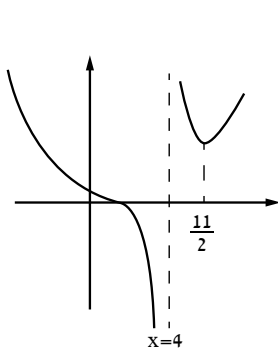
4 א. R . ב. $\sqrt{3}R$. ג. $2:1$. ד. $2R^2$

5 א. $\alpha = 30^\circ$. ב. $2R^2$

6 א. $\frac{\pi}{2}$ (1) זוגית. (2) $\frac{\pi}{2}$. ג. (1) $(0, 4)$ מקסימום, $(\frac{\pi}{4}, 2)$ מינימום, $(\frac{\pi}{2}, 4)$ מקסימום. (2) $a = -2$



7 א. $-b \leq x \leq b$ (1) . $(0, b)$, $(b, 0)$, $(-b, 0)$ (2) . $(0, b)$ מקסימום. (3) $(0, b)$ מקסימום. (4)



8 א. $b = 3$. ב. $C(\frac{\sqrt{2b}}{2}, \frac{\sqrt{2b}}{2})$ (1) . $b = 2$ (2) . $b = 2$ (3)

9 א. $a = 1$, $b = -4$. ב. $x < 4$, $x > 4$. ג. מינימום $(\frac{11}{2}, 60\frac{3}{4})$. ד.

ה. (1) איננה נכונה. (2) נכונה. (3) נכונה.

מתכונת מספר 7 – שאלון 581

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים. יש לענות על 5 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
 (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 (2) דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות:
 (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.
- ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.**

בהצלחה

מתכונת מספר 7 – שאלון 581

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

- (1) רוכב אופנוע יצא מנקודה A, ובאותה שעה יצא רוכב אופניים מנקודה B. הם רכבו זה לקראת זה ונפגשו בדרך. רוכב האופנוע הגיע לנקודה B כעבור 20 דקות מרגע הפגישה ורוכב האופניים הגיע לנקודה A כעבור 3 שעות מרגע הפגישה (מהירויות הרוכבים היו קבועות).
- א. מצא את היחס בין המהירות של רוכב האופנוע למהירות של רוכב האופניים.
- ב. נתון כי המרחק בין A ל-B גדול מ-100 ק"מ. מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות של כל אחד מהרוכבים אם ידוע שמהירות רוכב האופנוע אינה עולה על 120 קמ"ש.
- ג. מצא את הזמן הכולל שבו עברו הרוכבים את המרחק בין A ל-B.

- (2) נתונה סדרה הנדסית: a_1, a_2, \dots, a_n וידוע כי: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ $P = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$
- א. הוכח כי: $\frac{S}{P} = a_1 \cdot a_n$.
- ב. הוכח כי: $a_1 \cdot a_1 \cdot a_3 \dots a_n = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{n}{2}}$.

- ג. נתון כעת כי $a_1 = 1$. נגדיר: $R = a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \dots + a_{2n-1}^2$, $T = a_1 + a_5 + a_9 + \dots + a_{4n-3}$.
- (1) הראה כי מספר האיברים בסדרות הרשומות הוא זהה.

(2) מצא את ערכו של היחס: $\frac{R}{T}$.

3) מועמדים לקראת גיוס, המעוניינים להתקבל ללהקה צבאית, צריכים להיבחן בשני מבחנים:

מבחן בשירה ומבחן בתנועה. 25% מהמועמדים מצליחים במבחן בשירה. ההסתברות שמועמד יצליח במבחן בתנועה,

אם הוא הצליח במבחן בשירה, גדולה פי 6 מההסתברות שהוא יצליח במבחן בתנועה אם הוא נכשל במבחן בשירה.

א. (1) הראה שההסתברות שמועמד יצליח במבחן בשירה וגם במבחן בתנועה גדולה פי 2 מההסתברות

שמועמד יצליח במבחן בתנועה וגם ייכשל במבחן בשירה.

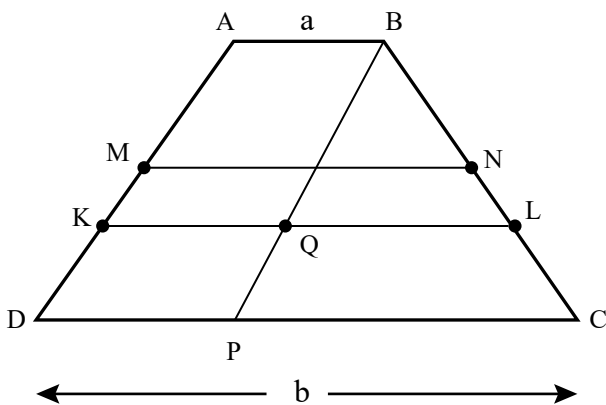
(2) מה ההסתברות שמועמד יצליח במבחן בשירה אם ידוע שהוא הצליח במבחן בתנועה?

ב. $\frac{13}{15}$ מבין המועמדים שנכשלו במבחן בשירה נכשלו גם במבחן בתנועה.

מה ההסתברות שמועמד יצליח בשני המבחנים

ג. האם המאורע "הצלחה במבחן בשירה" והמאורע "הצלחה במבחן בתנועה" הם מאורעות תלויים? נמק.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4) נתון: $DC = b$, $AB = a$, $AB \parallel KL \parallel CD$,

$$BP \parallel AD, S_{ABLK} = S_{KLCD}$$

א. בטא את LK באמצעות a ו- b .

(הדרכה: הורד את גובה הטרפז מנקודה B .)

ב. MN הוא קטע אמצעים בטרפז $ABCD$.

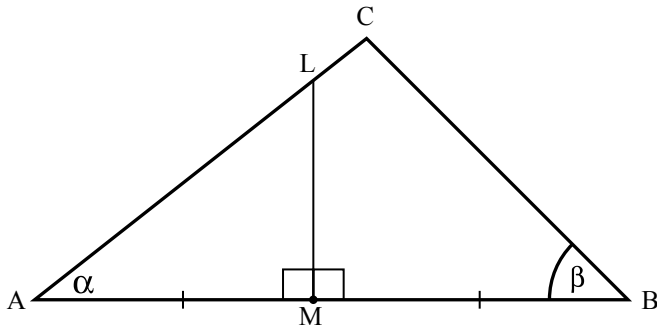
ידוע כי $b = 3a$. חשב את: $\frac{S_{MNCD}}{S_{ABCD}}$.

ג. נניח כעת שנבנה משולש ישר זווית שניצביו הם:

$$AB = a \text{ ו- } CD = b, \text{ יהיה } m \text{ התיכון ליתר}$$

במשולש זה.

הוכח כי: $\frac{m}{KL} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



5 במשולש ABC נתון: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$,

$\angle M = 90^\circ$, $AM = MB$, $(\beta > \alpha)$

א. הוכח: $\frac{AL}{LC} = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$

ב. ידוע ש- $AL = LC$. השתמש בתשובתך

לסעיף א' ומצא את β ,

מהו המשפט הגיאומטרי שמתארת

התוצאה שקיבלתם?

ג. במקרה אחר ידוע ש- $\frac{AL}{LC} = 2$ ו- $\angle LBC = \alpha$. מצא את זוויות המשולש ABC.

ד. במקרה של סעיף ג' מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את $\triangle LBC$ לרדיוס המעגל החוסם את $\triangle ABC$.

פרק שלוש – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

6 נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x + 1}$, ו- $g(x) = 4x^2 - 40x + 100$ ($x \neq -1$)

א. סרטט סקיצה של שתי הפונקציות.

ב. הישר $x = a$ ($3 < a < 5$) חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה C,

המרחקים של הנקודות A ו-C מציר ה- x הם אורכי צלעות המלבן.

(1) עבור איזה ערך של a יהיה שטח המלבן מקסימלי?

(2) מצא את השטח המקסימלי של המלבן.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי העקומות של שתי הפונקציות וציר ה- x .

(7) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{\sin x}{g(x)}$, $g(x) = 1 + \cos(bx)$

המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות של $g(x)$ עם ציר ה- x הוא π .

- א. מצא את ערכו של b . הצב את ערכו של b שמצאת וחקור את הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-\pi \leq x \leq 3\pi$.
 ב. ציין את:

(1) נקודות החיתוך עם הצירים.

(2) אסימפטוטות (אם יש).

(3) נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתבונן בפונקציה $h(x) = -f(x)$. קבע בעזרת הסברים מתאימים כיצד ישתנו נקודות הקיצון של $h(x)$ בהשוואה לאלו של הפונקציה $f(x)$.

ה. נגדיר את הפונקציה: $p(x) = \sqrt{f(x)}$. קבע ללא חישוב מהו הסימן של הביטוי: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} [p(x) - f(x)] dx$.

(8) נתונה פונקציה: $f(x) = \frac{bx-2}{\sqrt{ax^2-bx}}$

נתון כי אסימפטוטה אנכית של הפונקציה חותכת אסימפטוטה אופקית שלה בנקודה $(2, 2)$.

א. מצא את a ו- b .

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. בעזרת גרף הפונקציה $f(x)$ סרטט סקיצה של הפונקציה $h(x) = f(x-2) - 2$ והסבר את שיקוליך.

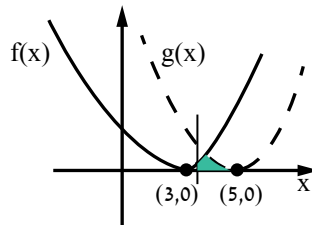
ה. נגדיר את הפונקציה: $g(x) = [f(x)]^2$. כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $g(x)$. נמק.

תשובות למתכונת מספר 7 – שאלון 581

(1) א. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{1}$. ב. $75 < v_1 \leq 120$, $25 < v_2 \leq 40$. ג. רוכב האופנוע: $1\frac{1}{3}$ שעה, רוכב האופניים: 4 שעות.

(2) ג. (2) היחס הוא 1. (3) א. (2) $\frac{2}{3}$. ב. 0.2 . ג. כן.

(4) א. $KL = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$. ב. $\frac{5}{8}$. (5) ב. $\beta = 90^\circ$, קטע אמצעים במשולש.

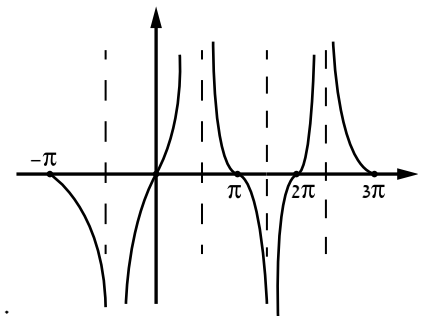


ב. (1) $a = 4$. (2) 4 . ג. $\frac{32}{27}$.

ג. $C = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. ד. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (6) א.

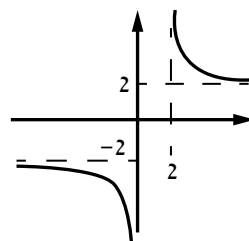
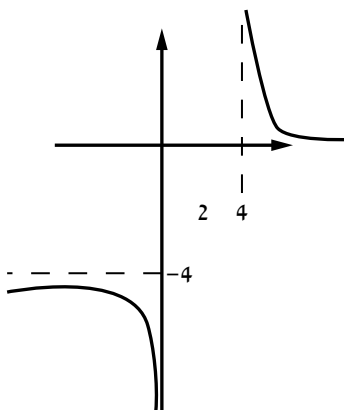
(7) א. $b = 2$. ב. (1) $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$, $(-\pi,0)$, $(3\pi,0)$. (2) $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$. (3) $(3\pi,0)$ מינימום קצה,

$(-\pi,0)$ מקסימום קצה, עלייה: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$, ירידה: $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < 1\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$.



ג. ד. נקודות הקיצון בקצוות ישנו את אופיין .

ממינימום למקסימום ולהפך. ה. הסימן חיובי.



ד.

ג.

(8) א. $b = 2$, $a = 1$.

ה. אין נקודות קיצון.

מתכונת מספר 8 – שאלון 581

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים. יש לענות על 5 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה. דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות: אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה

מתכונת מספר 8 – שאלון 581

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

(1) בשעה 08:00 יצא רן במכוניתו מנהריה לנתניה, שעה לאחר מכן, יצאה שירי על אופנוע מנתניה לעבר נהריה.

רן ושירי חלפו אחד על פני השני בשעה 10:00 והמשיכו כל אחד לדרכו שלו. ידוע כי שירי הגיעה לנהריה

10 דקות לפני שרן הגיע לנתניה.

א. מהו היחס בין המהירויות של רן ושירי?

ב. באיזו שעה הגיע רן לנתניה?

ג. ידוע כי סכום המהירויות של האופנוע והמכונית הוא 150 קמ"ש.

מצא באיזה מרחק מנתניה חלפו רן ושירי אחד על פני השני.

(2) נתונה סדרה הנדסית שכל n האיברים שלה הם חיוביים.

סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים.

א. חשב את מנת הסדרה.

ב. נתון ש- n הוא מספר זוגי. נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$,

$T_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_n$.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ הם איברי הסדרה הנתונה). חשב את היחס: $\frac{S_n}{T_n}$.

ג. נתון: $a_1 = 2$. הבע באמצעות n את הסכום $S_n + T_n$.

- 3) מועמדים לעבודה במשטרה נדרשים להיבחן אצל גרפולוג להערכת אמינותם, ידוע כי $\frac{4}{5}$ מהמועמדים הם אנשים אמינים, אם המועמד אכן אמין, הסיכוי שגרפולוג יאמת זאת הוא 0.7, אם המועמד אינו אמין ההסתברות שגרפולוג יקבע שהוא אמין היא 0.2.
- א. מה ההסתברות שגרפולוג יקבע שהמועמד אמין?
 ב. מה ההסתברות שהמועמד אכן אמין, אם גרפולוג קבע שהוא אמין?
 ג. כדי להתקבל למשטרה, צריך להיבחן אצל 4 גרפולוגים בלתי תלויים זה בזה, לפחות 3 מהם צריכים לקבוע שהמועמד אמין, ההסתברות של כל הגרפולוגים לקבוע אמינות זהה.
 מה ההסתברות שמועמד יתקבל למשטרה?
 ד. ידוע שלפחות 3 גרפולוגים קבעו שהמועמד אמין.
 מה ההסתברות ששלושת הגרפולוגים הראשונים קבעו שהוא אמין?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

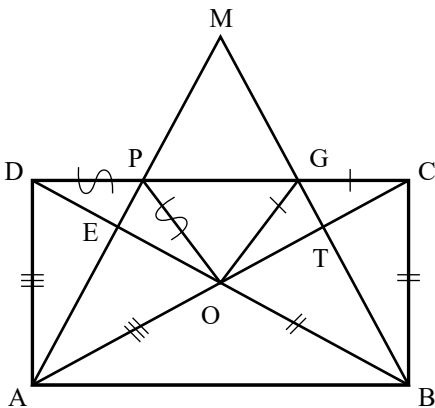
- 4) נתון: ABCD מקבילית, BCGO, AOPD דלתונים.

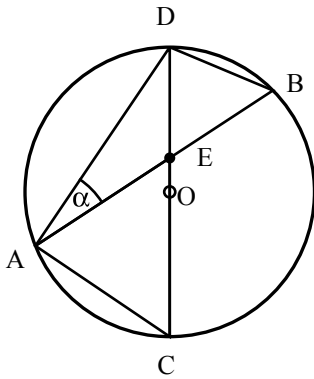
א. הוכח: $\frac{AE}{BE} = \frac{AO}{BM}$

ב. הוכח: $\triangle ABM$ שווה צלעות.

ג. הוכח: ABCD מלבן.

ד. הוכח: $OB^2 = 4AE \cdot EP$.





5 נתון: CD קוטר במעגל שמרכזו O.

נסמן: $\angle DAB = \alpha$.

א. הוכח: $\tan \alpha = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{DE}{EC}$ (הדרכה: סמן $\angle C = \beta$).

ב. נתון: $\frac{EC}{DE} = 4$, $\angle DBE = 36.27^\circ$. חשב את α .

ג. נתון: $AE \cdot EB = 16$ סמ"ר.

(1) חשב את רדיוס המעגל.

(2) חשב את $S_{\triangle ADB}$.

פרק שלוש – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

6 נתון הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - ax + 8}{x^2 - ax + 9}$ ($a < 10$).

ידוע ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא $-\frac{1}{4}$.

א. מצא את הפרמטר a.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) הראה כי אין נקודות קיצון לפונקציה ורשום תחומי עלייה וירידה.

(3) מצא אסימפטוטות לגרף הפונקציה

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתון: $g(x) = -f(x) + 1$ על סמך הסקיצה של $f(x)$ צייר את הסקיצה של $g(x)$, פרט את שיקוליך.

ד. נתון: $h(x) = \sqrt{f(x)}$. האם לפונקציה $h(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ והצירים.

7 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. (1) מצא אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

(2) מצא נקודות קיצון ורשום תחומי עליה וירידה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוסף לסקיצה של הפונקציה את הסקיצה של $g(x) = -f(x)$

ומצא את שטחו של המלבן המחבר את ארבע נקודות הקיצון בגרפים שסרטטת.

ה. מצא את שיעורי ה- x של נקודה הנמצאת על גרף הפונקציה בתחום $x \geq 1$

שמרחקה מראשית הצירים מינימלית.

8 נתונות הפונקציות: $f(x) = 2 \sin^2 2x$ ו- $g(x) = 3 - \sqrt{8} \sin 2x$ בתחום: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

א. מצא את נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות בתחום הנתון.

ב. סרטט סקיצה של הגרפים של שתי הפונקציות באותה מערכת צירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- y בתחום הנתון.

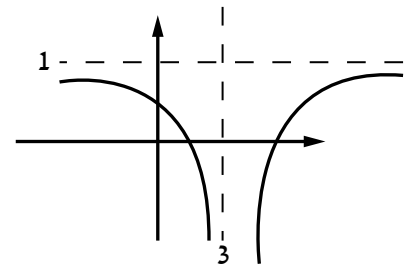
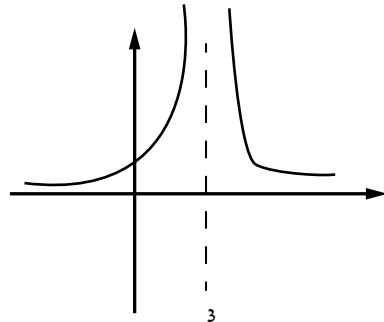
תשובות למתכונת מספר 8 – שאלון 581

(1) א. $\frac{2}{3}$. ב. 11:30 . ג. 120 ק"מ.

(2) א. 2 . ב. -3 . ג. $\frac{4}{3}(2^n - 1)$.

(3) א. 0.6 . ב. $\frac{14}{15}$. ג. 0.4752 . ד. $\frac{5}{11}$. (4) הוכחה . (5) ב. $\alpha = 18.814^\circ$. ג. (1) 5 ס"מ $R =$. (2) 7.8 סמ"ר.

(6) א. $a = 6$. ב. (1) $x \neq 3$, $(0, \frac{8}{9})$, $(4, 0)$, $(2, 0)$. (2) עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 3$. (3) $x = 3$, $y = 1$.

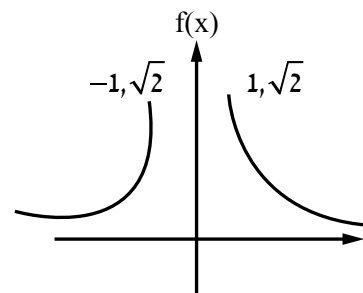
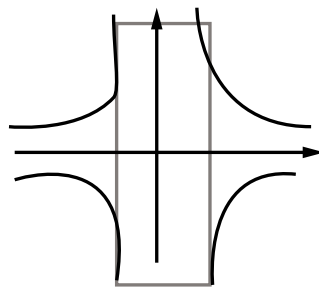


ד. כן יש: מינימום $(2, 0)$, $(4, 0)$.

ג.

(4)

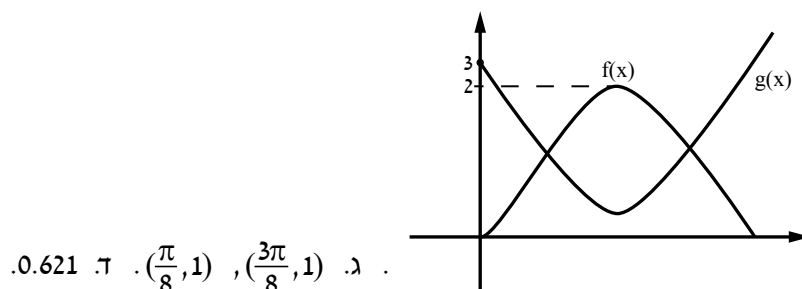
מינימום. ה. $1\frac{1}{3}$. (7) א. $x \geq 1$, $x \leq 1$. ב. (1) $y = 0$. (2) מקסימום קצה $(1, \sqrt{2})$, $(-1, \sqrt{2})$. עלייה: $x < -1$,



$S = 4\sqrt{2}$. ה. $x = 1.158$.

ירידה: $x > 1$.

(8) א. $f(x)$: מינימום $(\frac{\pi}{2}, 0)$, מקסימום $(\frac{\pi}{4}, 2)$, מינימום $(0, 0)$. $g(x)$: מינימום $(\frac{\pi}{2}, 3 - \sqrt{8})$, מינימום $(\frac{\pi}{4}, 3 - \sqrt{8})$.



ג. $(\frac{3\pi}{8}, 1)$, $(\frac{\pi}{8}, 1)$. ד. 0.621 .

ב. (0, 3) מקסימום.

מתכונת מספר 9 – שאלון 581

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים. יש לענות על 5 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה. דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות: אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

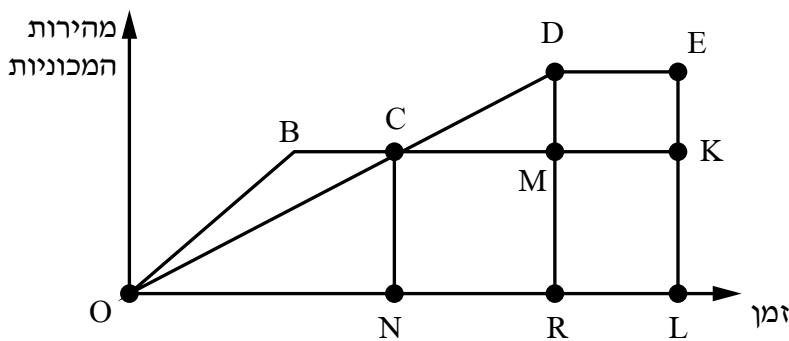
ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה

מתכונת מספר 9 – שאלון 581

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון – אלגברה והסתברות



(1) מתל אביב יצאו באותו הזמן שתי מכוניות,

תחילה נעו המכוניות בתאוצות שונות,

עד שכל אחת מהן הגיעה בתורה

למהירות קבועה. ברגע מסוים במהלך

תנועת המכוניות לשתייהן הייתה **אותה**

מהירות, בעוד שהמכונית הראשונה

עברה עד לנקודה זו מרחק גדול פי $1\frac{1}{4}$ מהמכונית השנייה.

היחס בין המהירויות הקבועות של המכוניות הוא 5 : 4. שתי המכוניות הגיעו ליעדן בו זמנית.

לפניך גרף המתאר את מהירות המכוניות כתלות בזמן מרגע צאתן מתל אביב.

א. היעזר בגרף ובנתוני השאלה והסבר מה מייצגים הישרים האופקיים KB ו-ED.

מה מייצגת הנקודה C ומה מייצג הישר האנכי EL?

ב. בהנחה שאורך המסלול עד לרגע מסוים הוא שטח הצורה הנוצרת בין הגרף לציר הזמן, מצא: $\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OCN}}$.

ג. בהנחה שהמרחק מתל אביב ליעד הוא 60 ק"מ.

מצא מה המרחק שעברה כל מכונית עד לרגע שבו מהירויות המכוניות היו שוות?

(2) סדרה מוגדרת על ידי: $a_{n+1} = 3a_n - 8$, $a_3 = 22$.

א. חשב את a_1 .

ב. הוכח כי הסדרה המוגדרת על ידי: $b_n = a_n - 4$ היא סדרה הנדסית.

ג. הבע את a_n כפונקציה של n בלבד.

ד. מצא את: $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{99}$.

ה. מצא נוסחה לסכום: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$.

3) בקופה 20 מטבעות, 3 מטבעות של 10 ש"ח, x מטבעות של 5 ש"ח והשאר מטבעות של שקל אחד.

מוציאים בזה אחר זה 2 מטבעות מהקופה ללא החזרה.

ההסתברות שהוצאו 2 מטבעות מאותו סוג היא $\frac{69}{190}$.

א. מצא את x אם ידוע שהמטבע השכיח בקופה הוא מטבע של שקל אחד.

ב. ידוע שהוצאו 2 מטבעות מסוגים שונים.

מה ההסתברות שסכום הכסף שהוצא אינו עולה על 10 ש"ח?

ג. חוזרים 6 פעמים על המשחק הבא:

מוציאים מטבע מהקופה, משאירים אותו בחוץ, מוציאים מטבע נוסף

וסוכמים את ערך המטבעות. (מחזירים את שני המטבעות לפני תחילת המשחק הבא).

ידוע שבכל אחד מהמשחקים הוצאו 2 מטבעות שונים זה מזה.

מה ההסתברות שבשליש מהמשחקים, סכום הכסף שהוצא לא עלה על 10 שקלים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) נתון: ABCD ריבוע.

$$BE = CF$$

$$FD = 2CF$$

א. חשב: $\frac{DG}{CF}$.

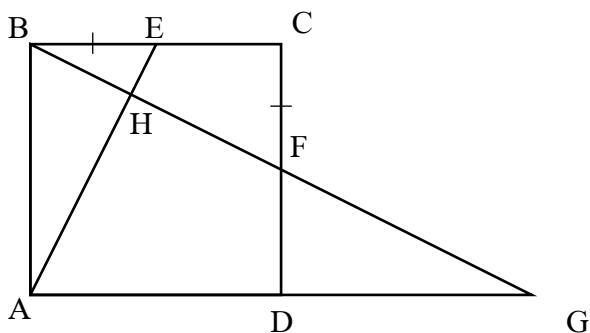
ב. (1) הוכח כי המרובע AHFD הוא בר חסימה במעגל.

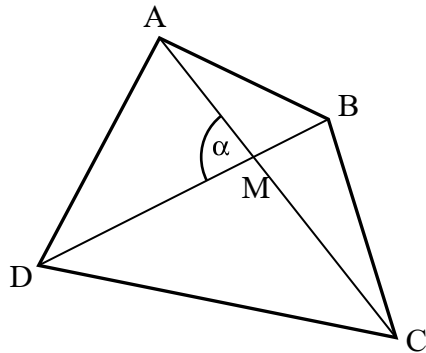
(2) נתון: $\angle HAF = 40^\circ$,

נסמן: $\angle BAF = \alpha$.

מצא את: $\angle FHD + \alpha$.

ג. הוכח כי: $CF^2 = EH \cdot AE$.



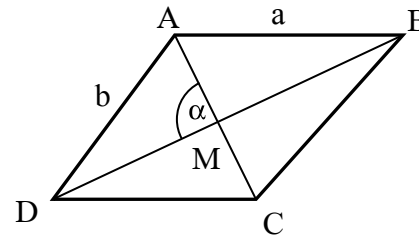


5 נתון: $ABCD$ מרובע כללי שהזווית בין אלכסונו היא $\angle M = \alpha$.

א. הוכח כי שטח המרובע $DCBA$ ניתן לחישוב על ידי:

$$\frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \sin \alpha$$

ב. נתון כעת כי המרובע $ABCD$ הוא מקבילית וידוע כי:



$$AB = a$$

$$AD = b$$

$$\text{הוכח כי: } a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(BD^2 + AC^2)$$

ג. היעזר בסעיפים א' ו-ב' והוכח כי: $S_{ABCD} = \frac{(a^2 - b^2) \tan \alpha}{2}$

פרק שלוש – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

6 א. נתונה פונקציה: $f(x)$ וידוע כי היא פונקציה זוגית.

הראה כי הפונקציה $g(x) = f'(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

ב. נתונה פונקציה $h(x)$ וידוע כי עבור $x = x_0$ יש לה נקודת מינימום.

הראה כי לפונקציה: $p(x) = \frac{1}{h(x)}$ קיימת נקודת מקסימום עבור $x = x_0$.

ג. נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{1}{x^4 - 2x^2}$

היעזר בסעיפים הקודמים ומצא:

(1) תחום הגדרה לפונקציה.

(2) נקודות קיצון וסיווגן.

(3) תחומי עלייה וירידה.

(4) אסימפטוטות.

(5) צייר סקיצה של הפונקציה.

ד. נגדיר את הפונקציה $t(x) = h(x) + a$ $a > 0$.

לאילו ערכי a הפונקציה $t(x)$ תחתוך את ציר ה- x בלפחות 2 נקודות שונות?

7 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{bx - x^2}$, $b > 0$.

- א. מצא תחום הגדרה לפונקציה ואת נקודת הקיצון הפנימית שלה (בטא בעזרת b).
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. בנקודה כלשהי $M(t, \sqrt{bt - t^2})$ שעל גרף הפונקציה מעבירים משיק לגרף הפונקציה וישר נוסף המאונך למשיק.
- (1) הראה כי האנך למשיק בנקודה M חותך את ציר ה- x בנקודה שאיננה תלויה ב- t .
- (2) הראה כי כל נקודה על גרף הפונקציה נמצאת במרחק קבוע מהנקודה שמצאת בסעיף ג' (1), בטא בעזרת b את המרחק הקבוע.
- ד. בנקודה כלשהי על גרף הפונקציה מעבירים ישר מקביל לציר ה- x , ישר זה חותך את גרף הפונקציה בנקודות A ו- B . הנקודות A, B ונקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x יוצרות טרפז. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B עבורם שטח הטרפז הוא מקסימלי. (ידוע כי $x_A > x_B$).

8 נתונה פונקציה: $f(x) = x + \sin x \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- א. הראה כי לפונקציה אין נקודות קיצון פנימיות בקטע הנתון.
- ב. סרטט סקיצה של $f(x)$ בתחום הנתון.
- ג. דרך הנקודה C המצויה על גרף הפונקציה ושיעור ה- x שלה הוא $\frac{\pi}{2}$ עובר ישר ששיפועו m ($m < 0$), הישר חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B ויוצר $\triangle AOB$ (O ראשית הצירים). עבור איזה ערך של m שטח המשולש הוא מינימלי?
- ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x עבור ה- m שמצאת בסעיף ד'.

תשובות למתכונת מספר 9 – שאלון 581

1 א. BK- המהירות הקבועה של המכונית הראשונה, DF- המהירות הקבועה של המכונית השנייה, C- הנקודה בה

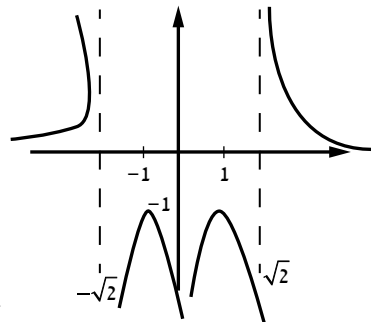
היו למכוניות מהירות שווה, EL- מייצג את זמן הנסיעה עד ההגעה ליעד. ב. $\frac{1}{4}$. ג. המכונית הראשונה עברה עד

לנקודה C: 24 ק"מ, המכונית השנייה עברה עד לנקודה C: 30 ק"מ.

2 א. $a_1 = 6$. ג. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$. ד. $\frac{1}{4}(9^{50} - 1) + 200$. ה. $-\frac{1}{2}(9^n - 1)$. 3 א. $x = 7$. ב. $0.578 = \frac{70}{121}$.

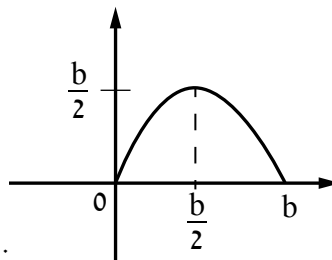
ג. 0.1584. 4 א. 6. ב. 50° . 6 ג. (1) $x > \sqrt{2}$, $0 < x < \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < x < 0$, $x < -\sqrt{2}$, (2) $(\pm 1, -1)$

נקודות מקסימום. (3) עלייה: $0 < x < 1$, $-\sqrt{2} < x < -1$, $x < -\sqrt{2}$. ירידה: $x > \sqrt{2}$, $1 < x < \sqrt{2}$, $-1 < x < 0$.



. $a \geq 1$. ד .

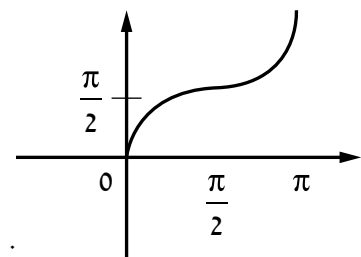
(4) $y = 0$, $x = 0$, $\pm\sqrt{2}$ (5)



. ג. (1) $x = \frac{b}{2}$ קבוע. (2) המרחק $\frac{1}{2}b$.

7 א. $0 \leq x \leq b$, $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ מקסימום. ב.

. ד. $A(\frac{3b}{4}, \frac{\sqrt{3}b}{4})$, $B(\frac{1}{4}b, \frac{\sqrt{3}b}{4})$



. ג. $m = -1$. ד. $S = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{2}$

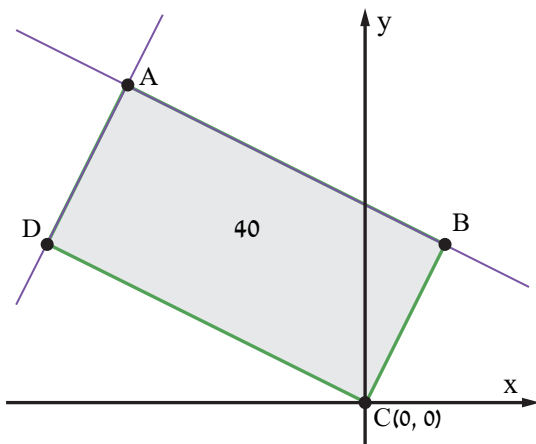
(8) ב.

מתכונת מספר 1 – שאלון 582

נכתב על ידי דוד צחור

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים.

ענו על שתיים מהשאלות 1 – 3



(1) במלבן ABCD הקודקוד C נמצא בראשית הצירים

(0,0) . הקודקוד B נמצא ברביע הראשון.

הצלעות AB ו-AD נמצאות בהתאמה על הישרים

$$y = mx + 20 \quad my + x - 10 = 0 \quad (m > 0)$$

נתון: שטח המלבן ABCD הוא 40.

א. מצאו את m.

ב. (1) נקודת אמצע האלכסון AC היא מרכז מעגל

המשיק לצלע AB.

מצאו את משוואת מעגל זה.

(2) מצאו את משוואת המשיק למעגל הנ"ל המקביל

לצלע BC, אם ידוע שהוא והצלע BC לא נמצאים

מאותו צד של מרכז המעגל.

ג. הישר עליו מונחת הצלע AD משיק לפרבולה $y^2 = 2px$.

מצאו את משוואת הפרבולה ואת נקודת ההשקה.

(2) נתונים שני מישורים:

$$\pi_1 : \underline{x} = (-7, 0, 0) + t(2, -1, 0) + s(2, 0, -3) \quad , \quad \pi_2 : -6x + 2y + 3z + 28 = 0$$

א. הראו כי המישורים מאונכים זה לזה.

ב. מצאו הצגה פרמטרית לישר l_1 העובר בראשית הצירים ומקביל לשני המישורים.

ג. חשבו את המרחק של הישר l_1 מכל אחד משני המישורים הנתונים.

ד. נסמן ב- l_2 את ישר החיתוך בין שני המישורים הנתונים.

(1) מצאו הצגה פרמטרית לישר l_2 .

(2) חשבו את המרחק בין הישרים l_1 ו- l_2 .

3 א. p הוא פרמטר חיובי. הוכיחו כי כל המספרים המרוכבים $z = x + yi$ המקיימים את המשוואה

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(z - \frac{p}{2}\right)\overline{\left(z - \frac{p}{2}\right)}$$

נמצאים במישור של גאוס על פרבולה.

ב. הפרבולה שמצאת בסעיף א' חותכת את המקום הגאומטרי $|z|=1$ בשתי נקודות.

אחת הנקודות מתאימה למספר המרוכב $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

מצאו את p ואת הנקודה הנוספת.

ג. w הוא המספר המרוכב המתאים לנקודה שמצאת בסעיף ב' ונמצאת ברביע הראשון.

w הוא האיבר הראשון של סדרה הנדסית שמנתה היא $q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

חשבו את המכפלה $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ענו על אחת מהשאלות 4 – 5

4 נתונה הפונקציה $f(x) = 6 \cdot 2^{-\frac{x}{6}} - 8 \cdot 2^{-\frac{x}{3}}$

א. (1) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים ואת נקודות הקיצון.

(בתשובתכם, דייקו עד שתי ספרות לאחר הנקודה העשרונית).

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. לקחו 8 ק"ג מחומר רדיואקטיבי א' שזמן מחצית החיים שלו הוא 3 חודשים

ו-6 ק"ג של חומר רדיואקטיבי ב' שזמן מחצית החיים שלו הוא חצי שנה.

נסמן ב- x את זמן ההתפרקות בחודשים, נסמן ב- $M(x)$ את כמות החומר הרדיואקטיבי א'

כעבור x חודשים ונסמן ב- $N(x)$ את כמות החומר הרדיואקטיבי ב' כעבור x חודשים.

(1) הוכיחו כי $N(x) - M(x) = f(x)$.

(2) כעבור כמה זמן יהיו משקלי שני החומרים שווים זה לזה?

(בתשובתכם, דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

(3) כמה זמן יחלוף מהרגע שבו משקלי שני החומרים יהיו שווים זה לזה ועד לרגע שבו יהיה ההפרש

בין משקל חומר ב' למשקל חומר א' הגדול ביותר? מהו ההפרש המקסימלי?

(4) כעבור כמה זמן סכום המשקלים שישארו מחומרים א' ו-ב' ביחד יהיה 2 ק"ג?

(5) $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת בתחום $x > 0$ ומקיימת $f(1) = 0$.

$F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ המקיימת $F(x) = x \cdot f(x) - x$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ ואת הפונקציה $F(x)$.

ב. $g(x)$ היא הפונקציה המוגדרת על ידי: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה g וסרטטו את גרף הפונקציה g .

(2) קבעו מי מהאינטגרלים הבאים גדול יותר ונמקו: $\int_1^e f(x)dx$ או $\int_1^e g(x)dx$.

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ שעובר בראשית הצירים והוסיפו

את סרטוטו לגרף הפונקציה $g(x)$.

(4) השטח המוגבל בין המשיק הנ"ל, גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

חשבו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

תשובות למתכונת מספר 1 – שאלון 582

1 א. $m = 2$

ב. (1) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5$ (2) $y = 2x + 15$

ג. משוואת הפרבולה: $y^2 = 160x$, נקודת ההשקה: $(10, 40)$

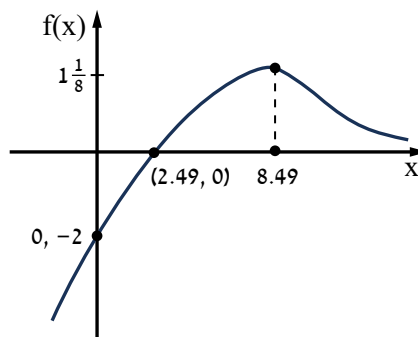
2 ב. $\underline{x} = t(-2, 3, -6)$

ג. $3 : \pi_1$, $4 : \pi_2$

ד. (1) $\underline{x} = (-\frac{1}{3}, 0, -10) + t(-2, 3, -6)$ (2) 5

3 ב. $p = \frac{3}{4}$, $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ג. i

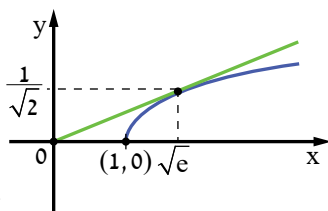
4 א. (1) נקודת חיתוך עם ציר ה-x: $(2.49, 0)$, נקודת חיתוך עם ציר ה-y: $(0, -2)$



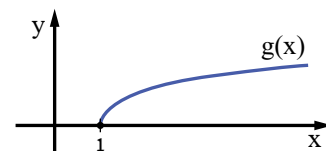
נקודת קיצון: $(8.49, \frac{9}{8})$ מקסימום. (2)

ב. (2) 2.49 חודשים. (3) 6 חודשים, ההפרש המקסימלי: $1\frac{1}{8}$ ק"ג. (4) 12 חודשים.

5 א. $f(x) = \ln x$, $F(x) = x \ln x - x$



(2) $\int_1^e f(x) dx < \int_1^e g(x) dx$ (3) $y = \frac{1}{\sqrt{2e}} x$



ב. (1) $x \geq 1$

(4) 0.3114

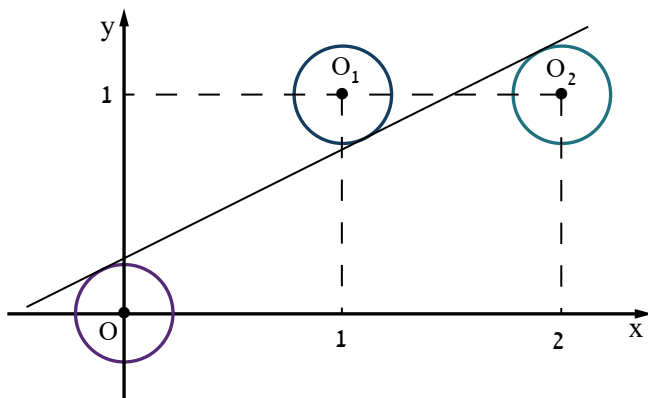
מתכונת מספר 2 – שאלון 582

נכתב על ידי סרור אסעד

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענו על שתיים מהשאלות 1 – 3

1) נתונים שלושה מעגלים זהים.



מרכזי המעגלים נמצאים בראשית הצירים O

ובנקודות O_1 ו- O_2 ברביע הראשון.

לשלושת המעגלים קיים משיק משותף,

כמתואר בסרטוט.

נתון: $O_1(1,1)$, $O_2(2,1)$.

א. מצאו את משוואת המשיק המשותף.

ב. המשיק שמצאת בסעיף א'.

משיק גם לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה A.

(1) מצאו שיעורי הנקודה A ומשוואת הפרבולה.

(2) הראו שהפרבולה עוברת בנקודה O_2 .

ג. מצאו משוואת ישר המקביל למשיק שמצאתם בסעיף א' ובמרחק $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ ממנו,

אם ידוע שהוא נמצא מעל המשיק הנ"ל. הראו שהישר עובר דרך הנקודה O_1 .

ד. שטח המקבילית ששתיים מצלעותיה הן המשיק מסעיף א'.

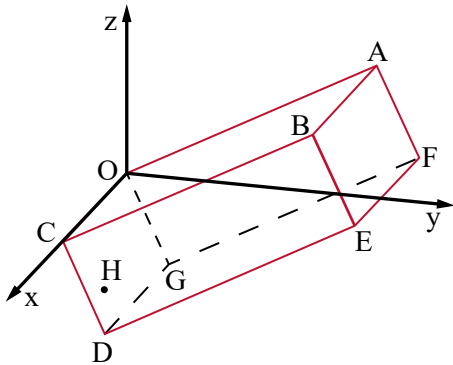
והישר מסעיף ג' ושניים מקודקודיה הם הנקודות A ו- O_1 שווה ל- $\frac{1}{4}$.

מצאו את משוואת הצלע הרביעית של המקבילית, המקבילה לצלע AO_1 ,

אם ידוע שהיא חותכת ציר ה-y בחלקו החיובי.

2) GFED היא תיבה, שמקצועה OC נמצא על ציר ה-x (ראו ציור).

הנקודות $A(0, 6, 3)$, $D(3, 1, -2)$ ו- $G(0, 1, -2)$ הן שלושה מקודקודיה של התיבה הנתונה.



א. מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה F

והמקביל למישור ADG.

ב. מצאו הצגה פרמטרית לישר המאונך למישור ADG

והעובר דרך הנקודה O.

ג. נתונה הנקודה $H(3, 1, -1)$. הנקודה P נמצאת

על הישר המחבר בין הנקודות D ו-H.

מצאו את שיעורי הנקודה P עבורו מתקיים $\cos(\angle POA) = \frac{3}{\sqrt{45}}$.

ד. מנקודה P מורידים אנך למישור שמצאת בסעיף א'.

האנך חותך את המישור בנקודה M. מצאו את שיעורי הנקודה M.

ה. נתון מעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. הישר $l: \underline{x} = (0, 2, -4) + t(1, 0, 0)$ נמצא במישור המעגל.

(1) הוכיחו שהישר l משיק למעגל.

(2) מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

3) z הוא מספר מרוכב המקיים: $z = \cos \theta + i \sin \theta$

א. הוכיחו:

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta \quad (2)$$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta \quad (1)$$

ב. (1) נתון: $|z|=1$.

$$\frac{\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) \cdot i}{z^2 + \frac{1}{z^2}} = -\sqrt{3} \quad \text{היעזרו בסעיף א' ופתרו את המשוואה:}$$

(2) סמנו במישור גאוס את הנקודות המתאימות לפתרונות אלו.

ג. נסמן את ארבעת הפתרונות שמצאתם בסעיף הקודם ב- z_1, z_2, z_3 ו- z_4 .

כאשר z_k הוא הפתרון המתאים לנקודה ברביע ה- k , $k = 1, 2, 3, 4$.

(1) הוכיחו כי: $z_2^{3n} + z_2^{3m+1} + z_2^{3p+2} = 0$ (הם מספרים טבעיים).

(2) מצאו את ה- n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים: $(\text{cis} 51^\circ)^n = z_4$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ענו על שאלה אחת מבין השאלות 4 – 5

(4) נתון כי הפונקציות $g(x)$ ו- $f(x)$, המוגדרות לכל x , מקיימות: $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

א. (1) נתון: $\int_0^1 g'(x) dx = 1 - e$, $g(1) = 1$, $f(1) = 0$.

מצאו את הערך המספרי של $g(0)$.

(2) נתון גם: $f(x) = x^2 + ax + b$, a ו- b פרמטרים.

מצאו את a ו- b .

ב. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x) = k \cdot g(x)$, $k > 0$.

בציור שלפניך מתוארים הגרפים של פונקציות הנגזרת

הראשונה $h'(x)$ והנגזרת השנייה $h''(x)$ של הפונקציה $h(x)$.

(1) היעזרו במידת הצורך בפרמטר k ומצאו את שיעורי

נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

(2) קבעו איזה מן הגרפים I או II הוא הגרף של $h'(x)$

ואיזה של $h''(x)$. נמקו.

(3) כמה פתרונות יש למשוואה $h''(x) = 0$? נמקו.

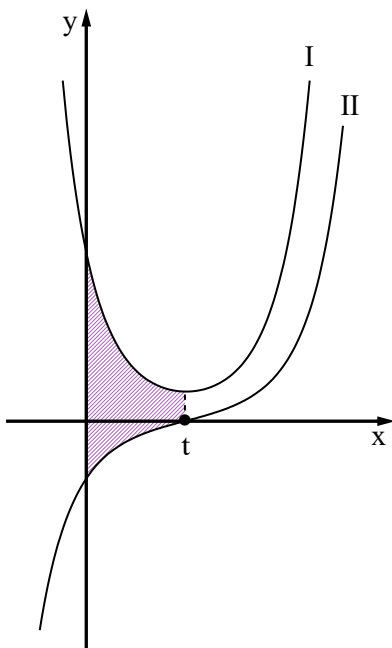
ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה I, גרף הפונקציה II, ציר ה- y

והישר $x = t$ (השטח המקוקו בציור) שווה ל- $2 - 6e$. מצאו את k .

ד. מעבירים לגרף הפונקציה $h'(x)$ משיק בנקודה $x = t$.

(1) מצאו את משוואת המשיק.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי המשיק שמצאת בסעיף ד'(1), גרף הפונקציה $h'(x)$ וציר ה- y .



5 נתונה הפונקציה $g(x) = m + mx(1 - \ln x)$. m הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ב. נתון שלפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון.

(1) מצאו את תחום הערכים של הפרמטר m .

(2) הביעו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ באמצעות m .

(3) מצאו את תחום הערכים של m שעבורם נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא נקודת מקסימום.

(4) נתון: $\int_1^2 g'(x) dx = 1 - 2 \ln 2$. חשבו את m .

ג. הראו כי למשוואה $g(x) = 0$ קיים פתרון יחיד הנמצא בתחום $3 < x < 4$.

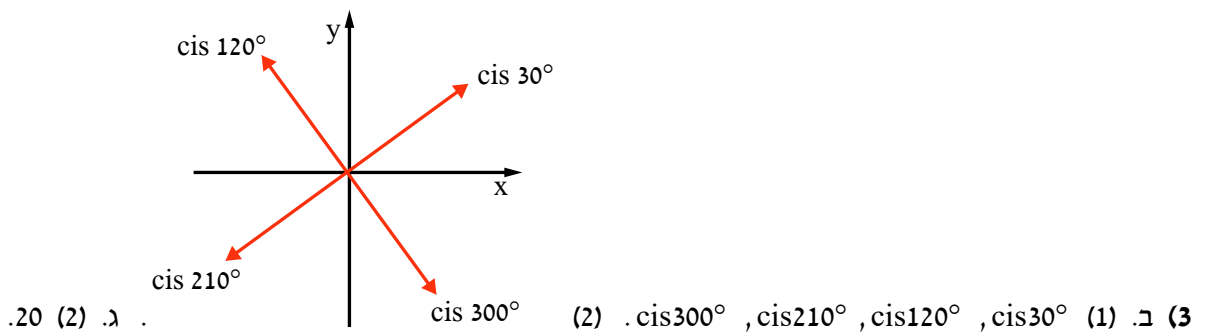
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x - g'(x)}{x}$. חשבו את $\int_1^e f(x) dx$.

תשובות למתכונת מספר 2 – שאלון 582

1 א. $4y - 2x - 1 = 0$ ב. $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $y^2 = \frac{1}{2}x$ ג. $2y - x - 1 = 0$ ד. $2y - 2x - 1 = 0$

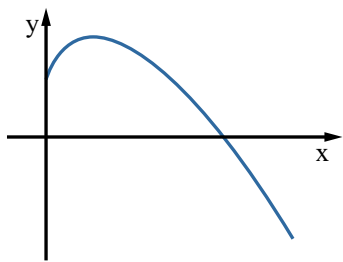
2 א. $y - z - 6 = 0$ ב. $\ell: \underline{x} = t(0, 1, -1)$ ג. $P(3, 1, 1\frac{1}{2})$ ד. $M(3, \frac{17}{4}, \frac{-7}{4})$ ה. $(3, 2, -4)$



4 א. (1) $g(0) = e$ (2) $a = -2$, $b = 1$ ב. (1) $(1, k)$ (2) גרף II הוא גרף $h'(x)$ מכיוון שיש לו נקודת חיתוך

עם ציר ה-x; גרף II עולה לכל x ולכן גרף I חיובי לכל x. (3) אין פתרונות מכיוון שהגרף הוא בצורת פונקציה קעורה

כלפי מעלה עם נקודת קיצון מעל לציר ה-x. ג. 2. ד. (1) $y = 4x - 4$ (2) $2e - 4 = 1.4365$



5 א. $x > 0$ ב. (1) $m \neq 0$ (2) $(1, 2m)$ (3) $m > 0$ (4) $m = 1$ ד.

ה. $e^{-\frac{1}{2}} = 2.218$

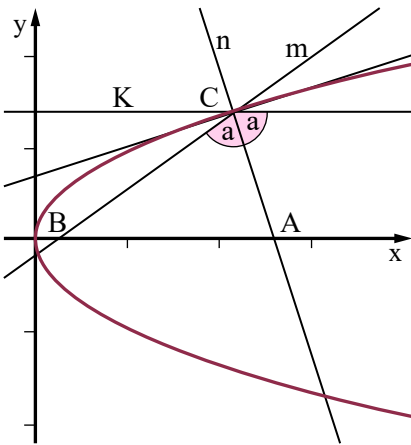
מתכונת מספר 3 – שאלון 582

נכתב על ידי דוד צחור

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענו על שתיים מהשאלות 1 – 3

(1) נתונה פרבולה $y^2 = 2px$. בנקודה $C(x_c, y_c)$ שעל הפרבולה,



מעבירים ישר n המאונך למשיק לפרבולה בנקודה זו.

הישר n חותך את ציר ה- x בנקודה A .

א. הביעו את שיעורי הנקודה A בעזרת p ו- x_c .

ב. ישר k עובר בנקודה C ומקביל לציר ה- x .

הישרים k ו- m יוצרים זוויות שוות עם הישר n . (ראו סרטוט).

הישר m חותך את ציר ה- x בנקודה B .

(1) הוכיחו כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

(2) הוכיחו כי הנקודה B היא מוקד הפרבולה.

(2) $SABC$ היא פירמידה ישרה שאורכי ישרה כל מקצועותיה שווים ל-1.

נסמן: $\underline{u} = \overrightarrow{SA}$, $\underline{v} = \overrightarrow{SB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{SC}$

הנקודה M נמצאת על מישור המשולש ABC

ומקיימת: $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$

מהנקודה M מורידים אנך למישור הפאה SAC .

אנך זה חותך את הפאה בנקודה D .

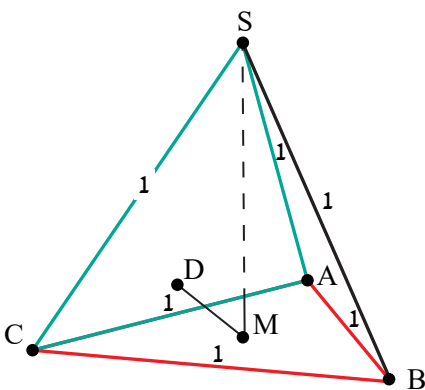
א. הוכיחו כי הווקטור \overrightarrow{SM} ניצב למישור המשולש ABC .

ב. הביעו את הווקטור \overrightarrow{MD} בעזרת \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

(הערה: שימו לב, ניתן לפתור את סעיפים ג' – ד' בעזרת טריגונומטריה במרחב).

ג. חשבו את מרחק הנקודה M מהמישור SAC .

ד. חשבו את הזווית בין SM והמישור SAC .



- (3) נתונה המשוואה: $z^2 - i \cdot 2 \sin \alpha \cdot z - 1 = 0$. α ממשי ומקיים $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
- א. הביעו בעזרת α את ההצגה הקוטבית של פתרונות המשוואה וסמנו במישור של גאוס את הנקודות המתאימות לפתרונות אלו.
- ב. הפתרון הנמצא ברביע הראשון הוא איבר ראשון של סדרה הנדסית a_1, a_2, a_3, \dots . הפתרון השני הוא האיבר השני בסדרה זו. נתון כי $\alpha = 60^\circ$.
- (1) הוכיחו כי האיברים a_{3n} הם ממשיים לכל n טבעי.
- (2) חשבו את המכפלה: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{24}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ענו על אחת מהשאלות 4 – 5

- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
- א. (1) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ עולה בכל תחומה.
- (2) מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.
- (3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלו).
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln[f(x)]$. ענו על תתי הסעיפים הבאים (חובה לנמק כל תשובה):
- (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
- (2) מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$? (אם יש כאלה)
- (3) מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$? (אם יש כאלה)
- (4) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?
- (5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה g .
- ג. הוכיחו בעזרת הסעיפים הקודמים, או בדרך אחרת, כי:
- $$\ln(e^x + 1) + \ln(e^x - 1) - \ln(e^{2x} + 1) < 0 \quad \text{לכל } x > 0$$

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a \ln x}{\sqrt{x}}$, $a > 0$

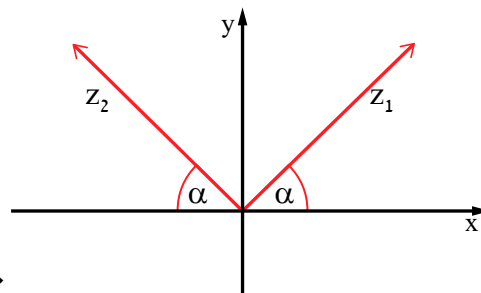
א. מצאו את:

- (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - (2) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלו).
 - (3) תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. השטח החסום על ידי גרף הפונקציה, ציר ה- x , והישר שעובר בנקודת הקיצון של הפונקציה ומאונך לציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .
נפח גוף הסיבוב שמתקבל הוא $\frac{32\pi}{3}$. מצאו את a .
- ד. מצאו את הסימן של האינטגרל המסוים $\int_t^s f'(x)dx$, $(t < s)$,
אם נתון ש- t ו- s נמצאים בין $\frac{1}{7}$ ל-7.

תשובות למתכונת מספר 3 – שאלון 582

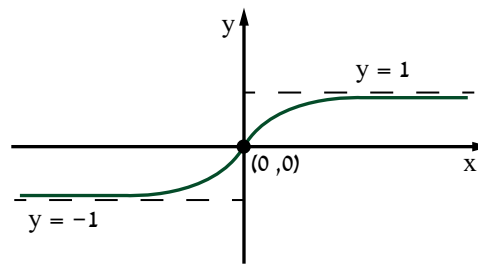
1 א. $A(x_c + p, 0)$

2 ב. $\frac{1}{9}u + \frac{1}{9}w - \frac{1}{3}v$ ג. $\frac{\sqrt{6}}{9}$ ד. 19.47°



ב. (2) 1.

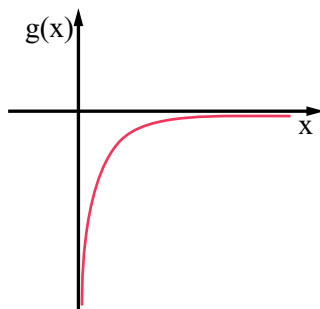
3 א. $\cos \alpha + \sin \alpha i$, $-\cos \alpha + \sin \alpha i$



ב. (1) $x > 0$.

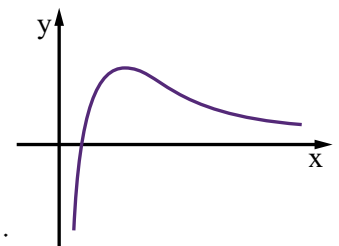
4 א. (2) $y = 1$, $y = -1$ (3) $(0, 0)$ (4)

(2) שלילית: $x > 0$ (3) עולה: $x > 0$



(4) אסימפטוטה אופקית: $y = 0$, אסימפטוטה אנכית: $x = 0$ (5)

5 א. (1) $x > 0$ (2) $(1, 0)$ (3) תחום העלייה: $0 < x < e^2$, תחום הירידה: $x > e^2$



ג. 2. ד. חיובי.

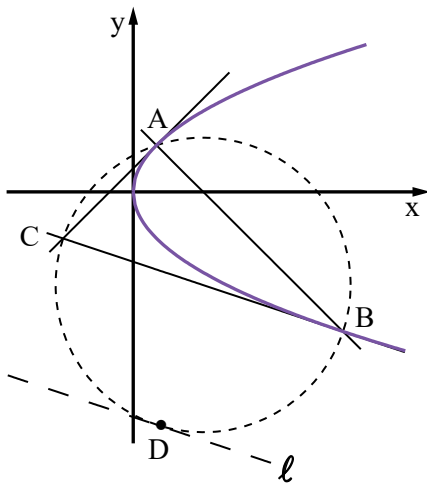
ב.

מתכונת מספר 4 – שאלון 582

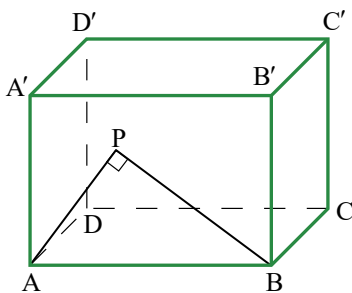
נכתב על ידי סרור אסעד

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענו על שתיים מהשאלות 1 – 3



- (1) בכל אחת מן הנקודות $A(t, 6)$ ו- $B(k, -18)$ הנמצאות על הפרבולה $y^2 = 2px$, מעבירים משיק לפרבולה כמתואר בציור. שני המשיקים נחתכים בנקודה C.
- א. הראו כי: $k = 9t$.
- ב. הביעו באמצעות p את שיפועי המשיקים AC ו-BC.
- ג. נתון: $C(-9, -6)$.
- (1) מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.
- (2) מצאו את משוואת הפרבולה.
- (3) הראו כי: $AB \perp AC$.
- ד. (1) מצאו את משוואת המעגל החוסם את המשולש ABC.
- (2) בנקודה D הנמצאת על המעגל, מעבירים משיק l , המקביל לצלע BC. מצאו את שיעורי הנקודה D.



- (2) הנקודות $A(28, 10, -1)$ ו- $B(-2, m, -1)$ הן שתיים מקודקודיה של תיבה $ABCD A'B'C'D'$. הנקודה $P(21, 6, 12)$ נמצאת על מישור הפאה $ABB'A'$ ומקימת: $\angle APB = 90^\circ$. (ראו ציור).
- א. מצאו את m.
- ב. הנקודה P היא מרכז של מעגל. המעגל עובר דרך הקודקוד A. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל זה בקודקוד A.
- ג. מצאו הצגה פרמטרית לישר BC.
- ד. (1) מצאו הצגה פרמטרית לישר AA' .
- (2) שיעורי הקודקוד A' הם $(x, 5, z)$.
- ה. כתבו את משוואת המישור שעליו מונחת הפאה $A'B'C'D'$.
- (1) שיעורי הקודקוד C הם $(1, -11, -4)$.
- חשבו את נפח הפירמידה CABP.
- (2) מה ניתן לומר על נפח הפירמידה $C'ABP$ בהשוואה לנפח הפירמידה CABP? האם הוא: גדול יותר, קטן יותר או שווה לו? נמקו.

3) z_1 ו- z_2 מייצגים שתי נקודות שנמצאות על מעגל שמרכזו

בראשית הצירים וגם על המקום הגיאומטרי $|\bar{z} - z| = 2$.

נתון: $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, $\angle z_1 O z_2 = \frac{\pi}{2}$ (ראשית הצירים) - O .

א. מצאו את z_1 ו- z_2 , אם נתון ש- z_2 נמצא ברביע הרביעי.

ב. z_1 ו- z_2 הם בהתאמה האיברים הראשון והשני של סדרה הנדסית.

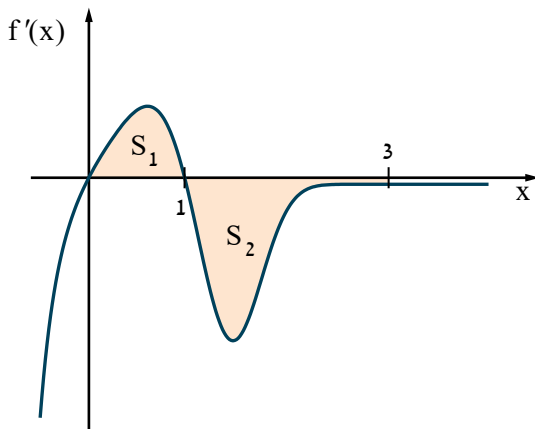
(1) חשבו את: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{17}$.

(2) הוכיחו שלכל מספר טבעי n מתקיים $S_{4n+2} = 2$.

ג. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n מתקיים: $z_1^{4n+2} + z_2^{4n+2} = 0$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ענו על שאלה אחת מבין השאלות 4 – 5



4) $f'(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x . גרף הפונקציה $f'(x)$

חותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודה $(1, 0)$ (ראו ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי ציר

ה- x ועל ידי הישר $x = 3$ (השטח הצבוע בציור) שווה ל-3.

נתון גם: $\int_0^3 f'(x) dx = -1$

א. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$

ועל ידי ציר ה- x (השטח S_1 המסומן בציור).

ב. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f'(x)$.

נתון: $f(0) = 1$. מצאו את $f(1)$.

ג. נתון גם כי הפונקציה $f'(x)$ מקיימת:

$$f'(x) = -(6x^2 - 2ax) \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^3 - ax^2}$$

(1) חשבו את a .

(2) מצאו את הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ד. היעזרו בנתונים ובסעיפים הנ"ל וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

5) המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a + b \cdot \ln 2x}{4x^2}$ בנקודה $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ מקביל לציר ה- x .

א. מצאו את a ו- b וקבעו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.

ה. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים (במידה ויש כאלה).

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. (1) הראו כי: $f(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$

(2) $g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = \frac{1 + \ln 2x}{x}$. מצאו את $g'(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר המאונך לציר ה- x

והעובר דרך נקודת הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $x = 2$.

תשובות למתכונת מספר 4 – שאלון 582

1. א. $m_{BC} = \frac{p}{-18}$, $m_{AC} = \frac{p}{6}$ ג. (1) $A(3, 6)$, $B(27, -18)$ (2) $y^2 = 12x$ ד. (1) $(x-9)^2 + (y+12)^2 = 360$

(2) $D(3, -30)$

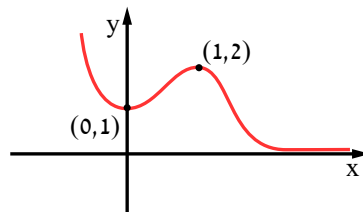
2. א. 4. ב. $\ell_1: \underline{x} = (28, 10, -1) + t(23, 2, 13)$ ג. $BC = \ell_2: \underline{x} = (-2, 4, -1) + t(-1, 5, 1)$

ד. (1) $AA_1: \underline{x} = (28, 10, -1) + S(-1, 5, -26)$ (2) $-x + 5y - 26z + 654 = 0$ ה. (1) 1,053 (2) נפח הפירמידה

C'ABP שווה לנפח הפירמידה CABP.

3. א. $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$ ב. (1) $256(1+i)$

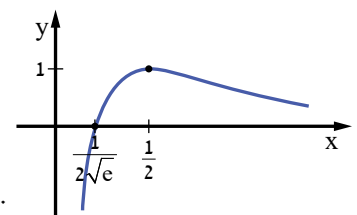
4. א. $S_1 = 1$ ב. $f(1) = 2$ ג. (1) $a = 3$ (2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^3 - 3x^2}$ (3) נקודת מינימום: $(0, 1)$



נקודת מקסימום: $(1, 2)$ ד.

5. $a = 1$, $b = 2$; תחום ההגדרה: $x > 0$ ב. נקודת מקסימום: $(\frac{1}{2}, 1)$ ג. תחום העלייה: $0 < x < \frac{1}{2}$, תחום

הירידה: $x > \frac{1}{2}$ ד. $x = 0$, $y = 0$ ה. נקודת חיתוך עם ציר ה-x: $(\frac{1}{2\sqrt{e}}, 0)$, נקודת חיתוך עם ציר ה-y: אין.



ג. (2) $g'(x) = \frac{-\ln 2x}{x^2}$ (3) 6.67

מתכונת מספר 5 – שאלון 582

נכתב על ידי דוד צחור

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענו על שתיים מהשאלות 1 – 3

1) א. (1) מצאו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור אשר המרחק של כל אחת מהן מהנקודה $N(4, 0)$ הוא $\frac{4}{5}$ מהמרחק של כל אחת מהן מהישר $x = \frac{25}{4}$.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה M עברה היקף המשולש PMN

הוא קבוע עבור כל נקודה P שעל המקום הגיאומטרי הנ"ל ומצאו גם את ההיקף הקבוע.

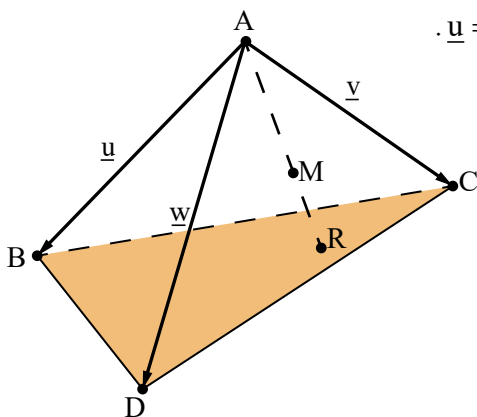
ב. הנקודה A נמצאת על המקום הגיאומטרי שמצאתם בסעיף א'.

ישר העובר דרך הנקודה A ומקביל לציר ה- x חותך את ציר ה- y בנקודה B .

הנקודה Q נמצא על הקטע AB ומקיימת: $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$.

מצאו וזהו את המקום הגיאומטרי של הנקודות Q המתקבלות באופן זה. (משוואה וצורה).

ג. מהן הנקודות המשותפות למקומות הגאומטריים שמצאתם בשני הסעיפים הקודמים? נמקו.



2) בפירמידה המשולשת $ABCD$ נסמן: $\underline{u} = \overline{AB}$, $\underline{v} = \overline{AC}$, $\underline{w} = \overline{AD}$.

א. הביעו את \overline{CB} ואת \overline{CD} בעזרת \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

ב. הנקודה M מקיימת: $\overline{AM} = \frac{1}{5}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.

המשך M חותך את הפאה BCD בנקודה R .

(1) הראו כי הנקודה M מחלקת את AR ביחס $13 : 47$.

(2) הביעו את \overline{AR} בעזרת \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

$$(3) \quad z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^8 \quad \text{הוא פתרון המשוואה}$$

$$z^4 + b \cdot z^2 + c = 0 \quad (b \text{ ו-} c \text{ הם ממשיים}).$$

א. מצאו את b ואת c .

ב. מצאו את כל שאר פתרונות המשוואה.

ג. מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור של

$$\text{גאוס המקיימות את המשוואה: } \left| \frac{z+2}{z+0.5} \right| = 2 \quad \text{והראו כי}$$

כל הפתרונות שמצאתם בסעיף ב' נמצאים על מקום גיאומטרי זה.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ענו על שאלה אחת מבין השאלות 4 – 5

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = x \cdot e^{1-\frac{x^2}{8}}$$

א. מצאו עבור הפונקציה $f(x)$ את:

(1) תחום ההגדרה.

(2) נקודות החיתוך עם הצירים.

(3) נקודות הקיצון.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות שעל גרף הפונקציה שבהן עובר המשיק ששיפועו מינימלי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישרים $x = 2\sqrt{2}$ ו- $x = -2\sqrt{2} + 1$.

ד. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת על ידי: $g(x) = f(x-1)$.

(1) הוסיפו לסרטוט של סעיף א' סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מהו השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 2\sqrt{2} + 1$ ו- $x = -2\sqrt{2} + 1$? נמקו.

ה. מגדירים פונקציה חדשה: $h(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

מצאו עבור אילו ערכי x עובר גרף הפונקציה $h(x)$ ברביע הראשון.

5 בסרטוט מתואר גרף הפונקציה $f(x) = x \ln x - x$.

א. מצאו את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות חיתוך עם הצירים (אם יש כאלו).

(3) שיעור ה- x של נקודת המינימום.

ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה P שעל הגרף.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה P . נתון כי

$1 < t \leq e$. המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A

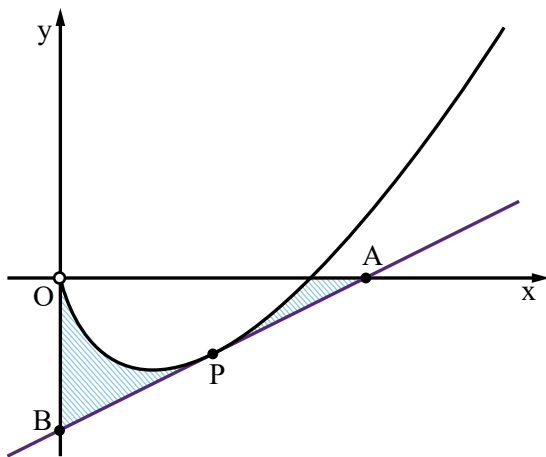
ואת ציר ה- y בנקודה B .

(1) הביעו בעזרת t את שטח המשולש OAB

(O ראשית הצירים).

(2) מצאו עבור איזה ערך של t שטח המשולש

OAB הוא מינימלי.



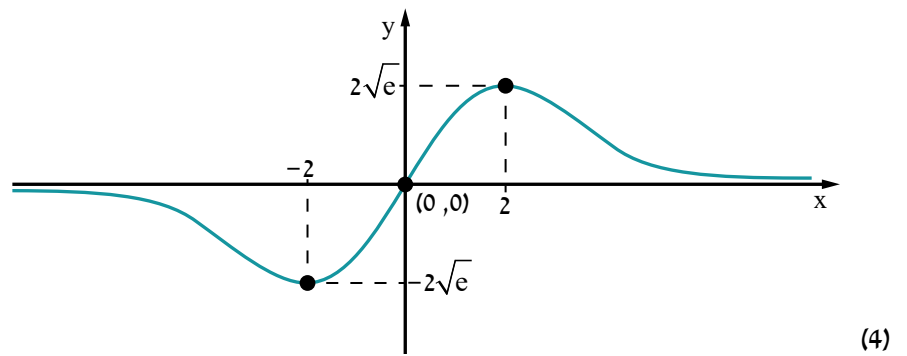
תשובות למתכונת מספר 5 – שאלון 582

1 א. (1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (2) $M(-4, 0)$, ההיקף הקבוע: 18. ב. $x^2 + y^2 = 9$, מעגל קנוני. ג. $(0, -3)$, $(0, 3)$.

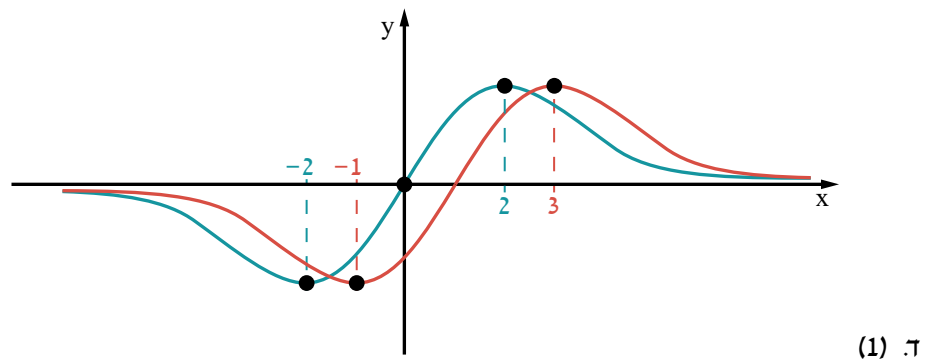
2 א. $\overline{CB} = \underline{u} - \underline{v}$, $\overline{CD} = \underline{w} - \underline{v}$. ב. (2) $\overline{AR} = \frac{12}{47}\underline{u} + \frac{15}{47}\underline{w} + \frac{20}{47}\underline{v}$.

3 א. $b = c = 1$. ב. $\text{cis}60^\circ$, $\text{cis}240^\circ$, $\text{cis}120^\circ$, $\text{cis}300^\circ$ או $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. ג. $x^2 + y^2 = 1$.

4 א. (1) כל x . (2) $(0, 0)$. (3) נקודת מינימום: $(-2, -2\sqrt{e})$, נקודת מקסימום: $(2, 2\sqrt{e})$.



ב. $(2\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{e}})$, $(-2\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{e}})$. ג. $8(e-1) \approx 13.746$.



(2) $8(e-1)$. ה. $0 < x < 2$.

5 א. (1) $x > 0$ (2) $(e, 0)$ (3) $x = 1$. ב. $\frac{t^2}{2 \ln t}$ (2) $t = \sqrt{e}$.

מתכונת מספר 6 – שאלון 582

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים. יש לענות על 3 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
 (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 (2) דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות:
 (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.
- ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.**

בהצלחה

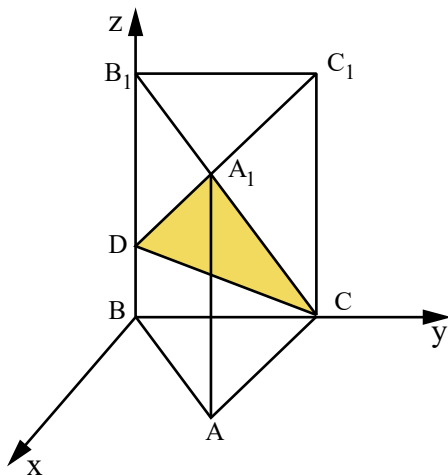
מתכונת מספר 6 – שאלון 582

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

- (1) א. שניים מקודקודי משולש נמצאים בנקודות $C(6,0)$ ו- $D(0,8)$ שטח המשולש הוא 30. מצא את המקום הגיאומטרי של אוסף הנקודות עליו נמצא הקודקוד השלישי של המשולש.
- ב. במשולש CDE כלשהו ששטחו 30 (C ו- D הן הנקודות הנתונות בסעיף א') נתון שהתיכון לצלע CD נמצא על ישר ששיפועו $-\frac{1}{2}$. מצא את שיעורי הקודקוד E .
- ג. נסמן את שני הפתרונות שמצאת בסעיף ב' ב- E ו- F . מצא את שטח המרובע $CDEF$.

- (2) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABC, A_1B_1C_1$ שהבסיסים שלה הם משולשים ישרי זווית $\angle A_1 = \angle A = 90^\circ$



כמתואר בצורה נסמן: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, $\overline{AA_1} = \underline{w}$.

נתון: $|\underline{w}| = 2$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 2\sqrt{2}$.

הנקודה D נמצאת על $\overline{BB_1}$ ומתקיימת $\overline{BD} = t\underline{w}$.

א. הראה שאין ערך של t עבורו $\overline{A_1D} \perp CD$.

ב. עבור $t = \frac{1}{2}$ מצא:

(1) את משוואת המישור A_1DC .

(2) את שטח המשולש CAD .

(3) את המצב ההדדי בין הישר AC_1 למישור A_1DC ,

במידה והישרים נחתכים מצא את נקודת חיתוכם.

- 3) א. סרטט במישור גאוס סקיצה של המקום הגיאומטרי של המספרים המרוכבים z המקיימים: $|z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$.
- ב. המקום הגיאומטרי מסעיף א' משיק לציר ה- x בנקודה z_1 . נתונה הנקודה $M(-3, \sqrt{3})$. נסמן ב- O את ראשית הצירים. המספר המרוכב z_2 נמצא על המקום הגיאומטרי של סעיף א' כך שהמרובע $z_1 M z_2 O$ הוא דלתון. מצאו את הזווית החדה של הדלתון.
- ג. (1) מצא את הארגומנט של z_2 ($\arg z_2$).
- (2) מבין המספרים המרוכבים z שבסעיף א', מהו המספר שיש לו את הארגומנט הגדול ביותר? מהו ארגומנט זה?
- ד. נסמן: $OM = z_3$. חשב: $\frac{(z_3)^4}{z_1 \cdot z_2}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

- 4) נתונה פונקציה: $f(x) = \ln(x^2 + 4x + c)$. c פרמטר. נתון כי לפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה $x = -2$.
- א. (1) מצא את ערך הפרמטר c .
- (2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (3) מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- (4) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. (1) נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x)$. סרטט סקיצה של $g(x)$.
- (2) עבור אילו ערכי k יש למשוואה $g(x) = k$ שני פתרונות בלבד?
- ג. נתונה פונקציה $h(x) = 2 \ln(x+2)$. הוכח כי לכל $x \geq -1$ מתקיים $g(x) + h(x) = 0$.

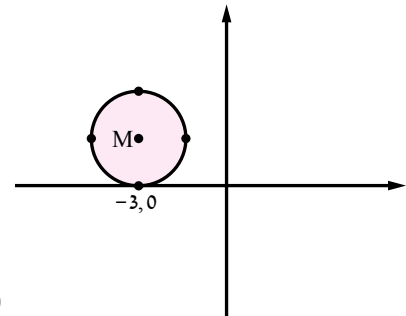
(5) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{\frac{ae^x}{e^x + e^2}}$ ו- $g(x) = \sqrt{\frac{e^x + e^2}{e^x}}$, $a > 0$.

- א. הבע באמצעות a במידת הצורך את תחום ההגדרה של שתי הפונקציות.
- ב. האסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $g(x)$ נמצאת במרחקים שווים משתי האסימפטוטות האופקיות של גרף הפונקציה $f(x)$. מצא את a ואת האסימפטוטות האופקיות של שתי הפונקציות.
- ג. (1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- y ואת שיעורי הנקודה בה נחתכות הפונקציות.
 (2) אם ידוע שלשתי הפונקציות אין נקודת קיצון, סרטט סקיצה של שתי הפונקציות באותה מערכת צירים.
- ד. נתונה הפונקציה: $h(x) = f^2(x)$.
 חשב: $\int_0^2 f^2(x) dx$.

תשובות למתכונת מספר 6 – שאלון 582

1 א. $3y+4x-54=0$, $3y+4x+6=0$ ב. $(15,-2)$, $(-9,10)$ ג. 60.

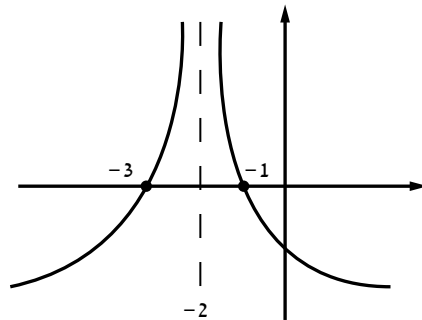
2 א. $3x-y-4z+4=0$ ג. $3\sqrt{2}$ ד. נחתכים ב- $(1,3,1)$.



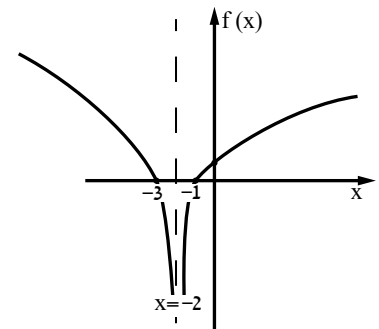
3 א. מעגל שמרכזו $(-3, \sqrt{3})$ ורדיוסו $\sqrt{3}$ ב. $\alpha = 60^\circ$.

ג. (1) $\arg(z_2) = 120^\circ$ (2) $z_1, 180^\circ$ ד. $8 - 8\sqrt{3}i$.

4 א. (1) $c = 4$ (2) לכל k (3) עלייה: $x > -2$, ירידה: $x < -2$ (4) $(-1, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, \ln 4)$.



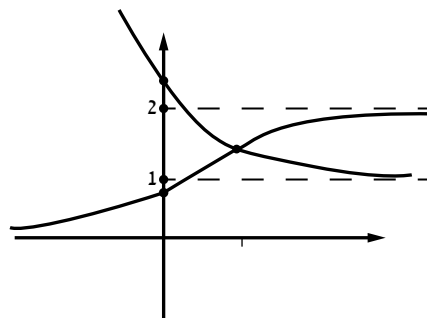
$k \leq 0$ (2) $g(x)$



ב. (1)

(5)

5 א. כל x ב. $g(x) : y = 1$, $a = 4$, $f(x) : y = 2$, $y = 0$ ג. $f(0) = \sqrt{\frac{4}{e^2+1}}$, $g(0) = \sqrt{1+e^2}$.



$y = 1$, $2, \sqrt{2}$ $y = 2$ ד. 2.26

נקודת החיתוך: $(2, \sqrt{2})$.

מתכונת מספר 7 – שאלון 582

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים. יש לענות על 3 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
 (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 (2) דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות:
 (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.
- ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.**

בהצלחה

מתכונת מספר 7 – שאלון 582

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) שיפועו של מיתר בפרבולה, העובר דרך מוקדה הוא 2. אורכו של המיתר הוא 15.

א. מצא את משוואת הפרבולה.

ב. נסמן את מוקד הפרבולה באות F , המדריך של הפרבולה חותך את ציר ה- x בנקודה M

ואת המיתר המוזכר בשאלה באות L .

(1) חשב את שטח המשולש FML .

(2) מצא את משוואת המעגל החוסם את משולש FML .

2) נתונה פירמידה ישרה $SABC$ שבסיסה ABC הוא משולש שווה צלעות.

נסמן: $\vec{SA} = \underline{u}$, $\vec{SB} = \underline{v}$, $\vec{SC} = \underline{w}$. נקודה בתוך הפירמידה

כך ש- $\vec{SN} = \frac{1}{4}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$. M נקודה במישור ABC

כך ש- $SM \perp ABC$ (SM אנך למישור ABC).

א. הוכח כי הנקודות S, M, N נמצאות על ישר אחד.

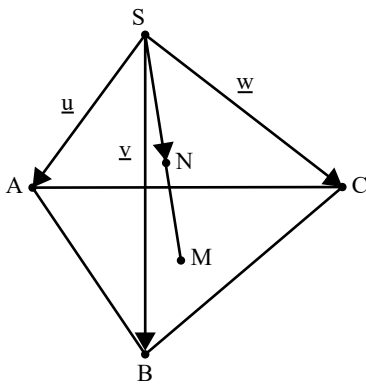
ב. (1) הוכח כי: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w}$.

(2) הוכח: $\vec{SC} \perp \vec{AB}$, $\vec{SA} \perp \vec{BC}$.

ג. נתון: $C(4\sqrt{3}, 4, 0)$, $\underline{u}(-4\sqrt{3}, 4, -8)$, $\underline{v}(0, -8, -8)$, $\underline{w}(4\sqrt{3}, 4, -8)$.

(1) חשב את נפח הפירמידה $SABC$.

(2) מצא את משוואת המישור ABS .



3) נתונה המשוואה הריבועית: $4z^2 + 4az + 4a - 3 = 0$ (z מספר מרוכב, a פרמטר ממשי).

א. עבור אילו ערכים של a פתרונות המשוואה הם מספרים מרוכבים?

ב. עבור $a = 2$ פתרונות המשוואה הם קודקודי משולש שווה שוקיים החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים.

חשב את זווית הראש של המשולש אם:

(1) פתרונות המשוואה הם קודקודי הבסיס של משולש (הבחן בין 2 מקרים).

(2) אחד מפתרונות המשוואה הוא קודקוד הראש של המשולש.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{\frac{-x}{x-1}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) הוכח כי הפונקציה עולה לכל x בו היא מוגדרת.

(3) מצא נקודות חיתוך עם הצירים (אם ישנן).

(4) מצא אסימפטוטות לגרף הפונקציה.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה העובר דרך הנקודה $(1, 0)$.

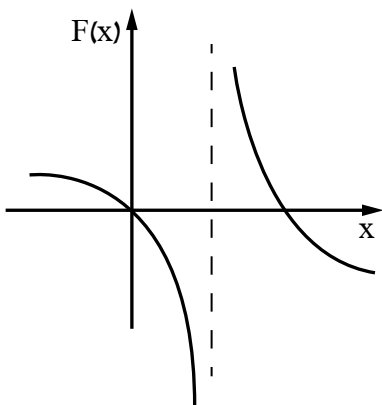
ב. מגדירים בעזרת $f(x)$ מסעיף א' פונקציה חדשה:

$$F(x) = (x-2) \ln f(x) \quad (\text{ראה סקיצה משמאל})$$

נסמן ב- S את השטח הכלוא בין גרף $F(x)$, ציר ה- x

והישר $x = a$ ($1 < a < 2$)

נתון כי: $S = \frac{1}{2}a^2 - a - 2 \ln \frac{1}{2}$ מצא את a .



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(\ln x - b)^2}{(\ln x + 2b)^3}$, $b > 0$

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים ומצא: (הבע באמצעות b במידת הצורך)

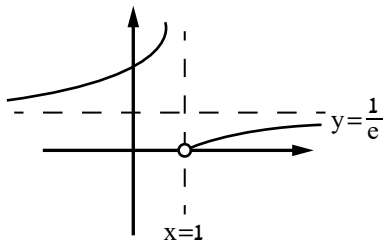
- א. תחום ההגדרה של ה- $f(x)$.
- ב. נקודות קיצון של הפונקציה וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).
- ה. אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. נגדיר $g(x) = f'(x)$ השטח המוגבל על ידי הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x והישרים $x = e^{2b}$ ו- $x = e^{4b}$ שווה ל- $-\frac{5}{384}$.
חשב את ערך הפרמטר b .

תשובות למתכונת מספר 7 – שאלון 582

1 א. $y^2 = 12x$. ב. (1) 36 . (2) $x^2 + (y+6)^2 = 45$.

2 ג. (1) $v = 128\sqrt{3}$. (2) $\sqrt{3}x + y - z + 8 = 0$.

3 א. $1 < a < 3$. ב. (1) 26.56° , 153.44° . (2) 126.87° .

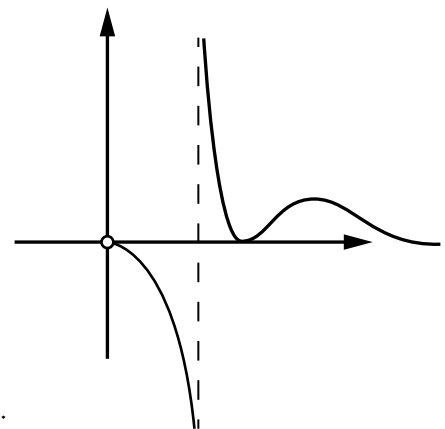


4 א. (1) $x \neq 1$. (3) $(0, 1)$. (4) $x = 1$ (משמאל) . (5) $y = \frac{1}{e}$.

(6) $y = \frac{1}{e^2}x - \frac{1}{e^2}$. (7) $a = 1\frac{1}{4}$.

5 א. $x > 0$. ב. מינימום: $(e^b, 0)$, מקסימום: $(e^{7b}, \frac{4}{81b})$. ג. תחומי עליה: $e^b < x < e^{7b}$,

תחומי ירידה: $x > e^{7b}$, $e^{-2b} < x < e^b$, $0 < x < e^{2b}$. ד. $(e^b, 0)$. ה. $x = e^{-2b}$, $y = 0$.



ג. $b = 2$.

ו.

מתכונת מספר 8 – שאלון 582

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים. יש לענות על 3 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
 (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 (2) דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות:
 (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.
- ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.**

בהצלחה

מתכונת מספר 8 – שאלון 582

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

(1) מעגל, אשר מרכזו נמצא ברביע הראשון, נוגע בציר ה- x בנקודה $D(3,0)$ וכן נוגע בישר: $3x - 4y + 36 = 0$.

א. מצא את משוואת המעגל.

ב. המעגל שאת משוואתו נתבקשת למצוא בסעיף א', חסום במשולש שווה שוקיים, בסיסו של משולש

זה נמצא על ציר ה- x ואחת משוקיו מונחת על הישר $3x - 4y + 36 = 0$.

מצא את משוואת הישר עליו נמצאת השוק השנייה של המשולש.

ג. מצא את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את המשולש לבין מרכז המעגל החסום במשולש.

ד. הישר עליו מונחים מרכז המעגל החוסם והחסום את המשולש משמש כמדריך לפרבולה קנונית.

מצא את משוואתה.

(2) נתונים הישר: $\ell_1: \underline{x} = (5, 8, -12) + t(1, 2, -3)$ והמישור $\pi_1: 2x + 3y + 4z - 12 = 0$.

הנקודות B ו-C הן נקודות החיתוך של המישור π_1 עם הצירים y ו-z בהתאמה.

הישר L_2 עובר דרך B ו-C.

א. מצא את משוואת הישר L_2 .

ב. מה הזווית בין הישרים L_1 ו- L_2 ?

ג. מישור π_2 עובר דרך הנקודה $A(1,0,0)$ ומכיל את ישר L_2 . מצא את משוואת מישור π_2 .

ד. האם נכונות הטענות הבאות (נמק תשובותיך):

(1) הישר: $L_3: \underline{x} = (12, 3, 4) + t(12, 3, 4)$ מאונך למישור π_2 ועובר בראשית הצירים. נמק.

(2) הישר L_1 מוכל במישור π_1 .

3 א. אחד מפתרונות המשוואה $(-1+i)z^2 - kz + 4i = 0$ הוא $z_1 = i$.

(1) מצא את k .

(2) מצא את הפתרון השני z_2 של המשוואה.

ב. נתון מספר מרוכב z שנמצא ברביע הראשון בתוך מעגל היחידה.

(1) סרטט במערכת הצירים סקיצה של מעגל היחידה ומקם בסרטוט את המספר z ואת

המספרים הבאים (נמק): $\frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{z}}, -z, \bar{z}$.

(2) היכן נמצא המספר $z + \bar{z}$? נמק את תשובתך.

(הערה: אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב').

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4 נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^4 x - \ln^2 x$.

א. (1) מה תחום ההגדרה של $f(x)$?

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

(3) מצא את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט במערכת צירים נפרדת את גרף הפונקציה ההפוכה של $f(x)$,

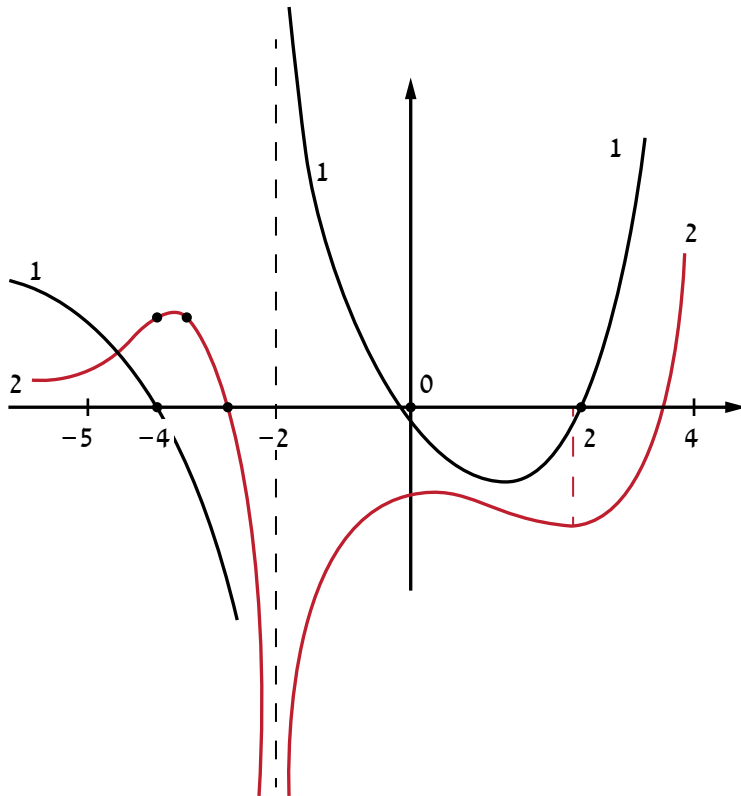
כלומר את $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. לצורך הסרטוט מצא: תחום הגדרה, אסימפטוטות אנכיות, נקודות קיצון

וסוגן (ניתן להיעזר בתשובותיך לסעיף א').

ג. הישר $y = k$ לא חותך את הגרף של $f(x)$ ולא חותך את הגרף של $g(x)$.

מצא את התחום של k .

5 בסרטוט מופיעים גרף של $f(x)$ וגרף של $f'(x)$ בתחום $-5 \leq x \leq 4$.



א. מי משני הגרפים מייצג את $f(x)$? נמק.

ב. נתון: $f(x) = \frac{(x^2 - m)e^x}{(x + n)^2}$.

ברביע השלישי גרף הפונקציה שלילי

בתחום $-\sqrt{12} < x < -2$.

מצא את m ו- n .

ג. נתון ששיפוע המשיק לגרף הנגזרת $f'(x)$

בנקודה $x = 1$ הוא 0.

מצא תחומי קעירות מעלה ומטה של גרף

הפונקציה בתחום $x > -2$.

ד. מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של $f(x)$

ואת סוגן.

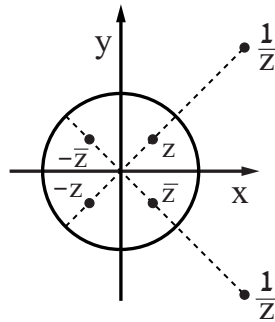
ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף $f'(x)$

ובין ציר ה- x ברביעי הרביעי.

תשובות למתכונת מספר 8 – שאלון 582

(1) א. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$. ב. $4y + 3x - 54 = 0$. ג. $9\frac{3}{8}$. ד. $y^2 = -12x$.

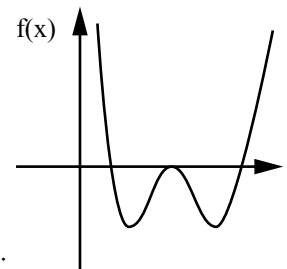
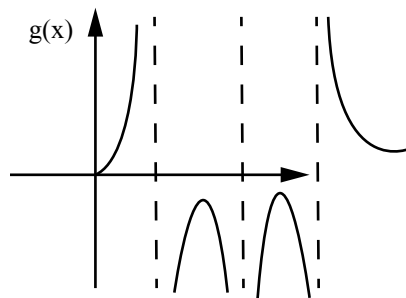
(2) א. $L_2: \underline{x} = (0, 0, 3) + t(0, 4, -3)$. ב. 24.67° . ג. $12x + 3y + 4z - 12 = 0$. ד. (1) נכונה. (2) איננה נכונה.



(3) א. (1) $3-i$ (2) $-2-2i$. ב. (1) . (2) על החלק החיובי של הציר הממשי (יכול להיות

בתוך המעגל, מעל המעגל או מחוץ למעגל).

(4) א. (1) $x > 0$. (2) $(e, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{e}, 0)$. (3) $(e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}, -\frac{1}{4})$ מינימום, $(e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}, -\frac{1}{4})$ מינימום, $(1, 0)$ מקסימום.



ג. $-4 < k < -\frac{1}{4}$.

ב. (4)

(5) א. גרף 2 . ב. $m = 12$, $n = 2$. ג. $1 < x < 4$: . $-S < x < -2$, $-2 < x < 1$:

ד. $(-4, 0.018)$ מקסימום, $(0, -3)$ מינימום, $(2, -3.69)$ מינימום. ה. 0.69 יח"ר S .

מתכונת מספר 9 – שאלון 582

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים. יש לענות על 3 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
 (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 (2) דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות:
 (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.
- ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.**

בהצלחה

מתכונת מספר 9 – שאלון 582

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

(1) במשולש ABC נתון: $A(-2,7)$, $C(7,-5)$.

אורך הגובה לצלע AC הוא 5 ואורך הגובה לצלע BC הוא $3\sqrt{5}$.

א. מצא את הקודקוד B אם נתון שהוא נמצא מתחת לצלע CA וידוע כי $x_B < 0$.

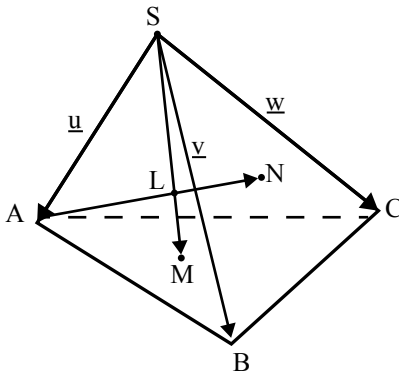
ב. נקודה B שמצאת בסעיף א' היא מרכז מעגל המשיק לצלע AC. מצא את משוואת המעגל.

ג. נקודה B שמצאת בסעיף א' היא מוקד הפרבולה $y^2 = -2px$ ($p > 0$).

מצא את משוואת הפרבולה.

ד. בפרבולה שמצאת בסעיף ג' מעבירים אלומת ישרים מקבילים המהווים מיתרים בפרבולה

ששיפוע כל אחד מהם m. בטא בעזרת m את המקום הגיאומטרי של אמצעי כל המיתרים הללו.



(2) נתונה פירמידה משולשת ישרה SABC שבסיסה ΔABC .

נסמן: $\overline{SA} = \underline{u}$, $\overline{SB} = \underline{v}$, $\overline{SC} = \underline{w}$.

נקודה M היא מפגש תיכוני המשולש ABC.

א. בטא את \overline{SM} באמצעות \underline{u} , \underline{v} , ו- \underline{w} .

ב. N היא נקודת מפגש תיכוני המשולש SBC, ו- \overline{AN} .

נחתכים בנקודה L. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה L את \overline{SM} .

ג. נתון כעת כי נקודה D מצויה במישור ABC באופן ש-ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו $\sqrt{2}$ ס"מ,

$\sqrt{5}$ ס"מ $|\underline{u}| =$. חשב את נפח הפירמידה S.ABCD.

3 נתון: z מספר מרוכב המקיים: $z = 1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha i$, בתחום $0 < \alpha < 90^\circ$.

א. הוכח כי: $z = 2 \sin \alpha \operatorname{cis}(90 - \alpha)$.

ב. נתון: $|z| = 1$. מצא את α .

ג. נתון: $z_n = (1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha i)^n$ (n טבעי).

ד. עבור ערך ה- α שמצאת בסעיף ב' חשב: $z_1 + z_2 + \dots + z_{17}$.

ה. קודקודי מצולע משוכלל בן 8 צלעות (מתומן) חסומים במעגל

קנוני ונמצאים במישור גאוס (ראה סרטוט משמאל) $z_1 = A$.

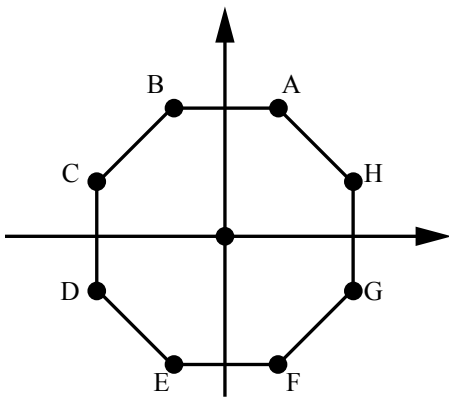
נסמן ב-a את מכפלת ארבעת קודקודי המתומן המייצגים

את הקודקודים F, D, B, H.

נסמן ב-q את המכפלה $z_1 z_2 \dots z_{11}$.

11

מצא איזה מקודקודי המתומן מתלכד עם הנקודה q. נמק.



פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4 אחת מנקודות הפיתול של הפונקציה: $f(x) = (4x^2 + 12x + b)e^x$ היא $x = -2.5$.

א. מצא את ערכו של b ואת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה ושאינן לה נקודות קיצון.

ג. מצא תחומי קעירות מעלה ומטה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף ה- $f(x)$. (סמן את נקודות הפיתול).

ה. היעזר בנגזרות של $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ ו- $g = (x - 1)e^x$ על מנת לחשב את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)$,

ציר ה-x, ציר ה-y והישר $x = -1$.

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x^2 - 2x + a)$.

- א. מצא את a אם נתון שנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ נמצאת על ציר ה- x .
- ב. מצא את התחום בו הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה ואת התחום בו היא קעורה כלפי מטה.
- ג. (1) מהם תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת? נמק.
 (2) מהם השיעורים של נקודות הקיצון של $f'(x)$ ומהו סוגן?
- ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה- x בגבולות שבין ציר ה- y והישר $x = 2$.
- ה. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x) + 3$.
 מצא את שיעור ה- x של נקודת הפיתול של הפונקציה $g(x)$.
- ו. נגדיר: $h(x) = f(x) \cdot f'(x)$. בתחום $0 < x < 2$. מתי ערכי $h(x)$ חיוביים?
 ומתי ערכי $h(x)$ שליליים?

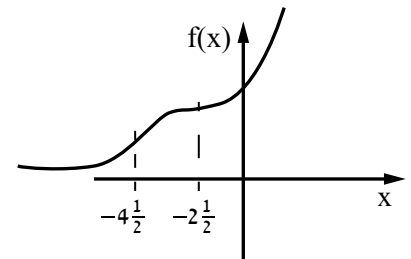
תשובות למתכונת מספר 9 – שאלון 582

(1) א. $B(-3,0)$. ב. $(x+3)^2 + y^2 = 25$. ג. $y^2 = -12x$. ד. $y = -\frac{6}{m}$.

(2) א. $\frac{1}{3}(u+v+w)$. ב. $3:1$. ג. $\frac{4}{3}$ סמ"ק

(3) א. $\alpha = 30^\circ$. ג. -1 . ד. G .

(4) א. $b = 13$ מוגדרת לכל y . ג. קעורה מעלה: $x > -2.5$, $x < -4.5$, קעורה מטה: $-4.5 < x < -2.5$.



ד. ה. $9 - \frac{9}{e} = 5.689$.

(5) א. $a = 2$. ב. קעורה מעלה: $x > 2$, $x < 0$, קעורה מטה: $0 < x < 2$. ג. (1) עולה: $0 < x < 2$, יורדת: $x > 2$.

$x < 0$. (2) $(2,1)$ מקסימום, $(0,-1)$ מינימום. ד. $2 \ln 2 = 1.386$. ה. $x = 1$. ו. $h(x) > 0$ ו- $1 < x < 2$, $h(x)$

שלילית: $0 < x < 1$.

