

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

תוכנית חדשה

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
- פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות
 - פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
 - פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
 חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^n$.

$$T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

(1) הוכיחו כי:

$$T_k = (2k - 3) \cdot 2^{k+1} \quad \text{אם בעבור } k \text{ טבעי כלשהו מתקיים:}$$

$$T_{k+1} = (2k - 1) \cdot 2^{k+2} \quad \text{אז מתקיים:}$$

לפניכם טענה: לכל n טבעי מתקיים: $T_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1}$.

(2) הסבירו מדוע טענה זו אינה נכונה.

ב. בטרפז ABCD ($AB \parallel CD$) הקטע EF הוא קטע אמצעים.

הקטע EF חותך את האלכסונים AC ו-BD

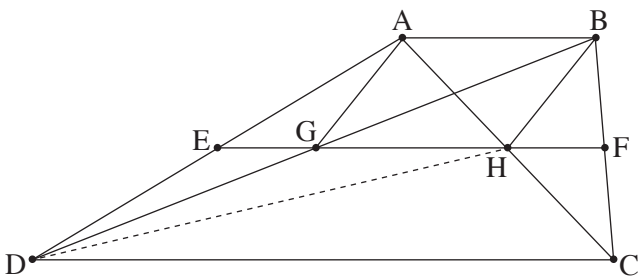
של הטרפז בנקודות H ו-G בהתאמה.

נתון כי המרובע ABHG הוא מקבילית.

$$(1) \text{ הוכיחו: } GH = 2EG.$$

המשך הישר AG חותך את הקטע DH בנקודה M.

(2) הוכיחו: הקטע AM חוצה את הקטע DH.



ג. לפניכם הגרפים III-I, המייצגים את הפונקצייה $f(x)$, את פונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$, ואת פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$. הפונקציות מוגדרות עבור $0 \leq x \leq 3$.

(1) התאימו כל אחד מן הגרפים III-I לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$. נמקו.

ענו על התת-סעיפים (2)-(3) על פי הנתונים המופיעים בגרפים III-I.

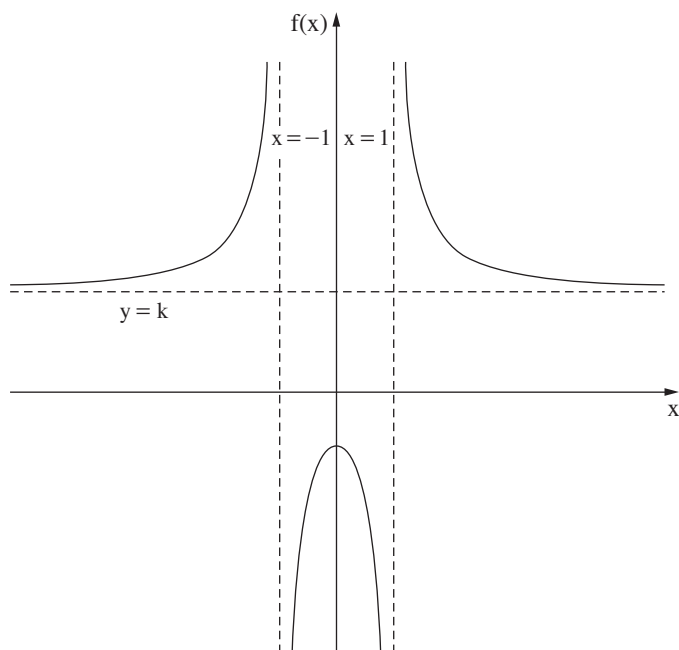
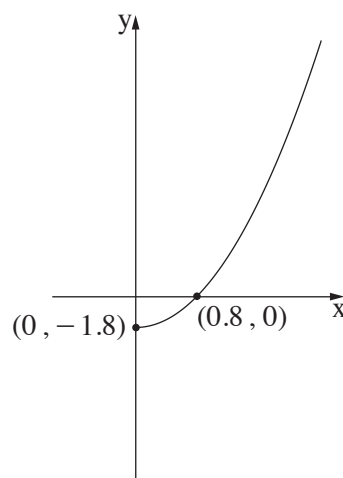
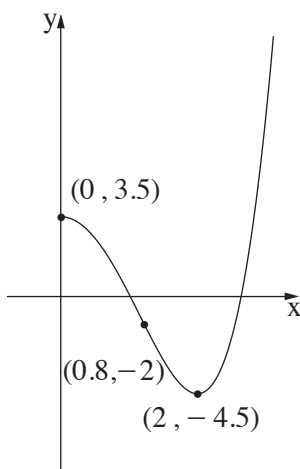
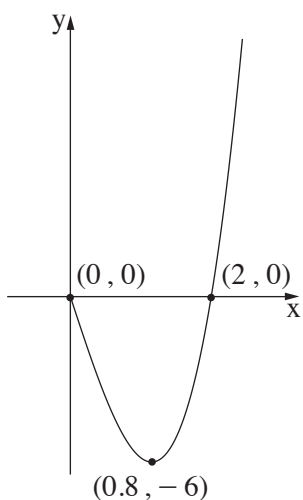
(2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.

(3) מצאו את הערך של האינטגרל: $\int_0^{0.8} f''(x) dx$.

III

II

I



ד. לפניכם הגרף של הפונקצייה $f(x)$.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת עבור $x \neq -1, x \neq 1$. משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ הן:

$$k > 1, y = k, x = -1, x = 1$$

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y הם $(0, -a)$, הוא מספר חיובי.

(1) מצאו עבור אילו ערכים של a

יש לגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ שתי נקודות חיתוך. נמקו.

(2) נתון כי המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ הוא 1.5.

מהו הערך של k ? נמקו.

2. נתונות שתי סדרות הנדסיות אינ-סופיות מתכנסות, A ו- B , שכל איבריהן שונים מ-0.

האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A .

האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B .

משתי הסדרות ההנדסיות A ו- B בונים סדרה הנדסית אינ-סופית מתכנסת חדשה, שאיבריה הם:

$$\dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \dots$$

כל שלוש הסדרות, הסדרה A , הסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B .

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1, c_2, c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

$$\text{נתון כי } c_2 \text{ שווה ל-} -c_1, \text{ ומתקיים גם: } \frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}.$$

ג. מצאו את c_1 .

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל- c_1 ,

$$\text{ומתקיים גם: } \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$$

ד. מצאו את הערך של q_B .

3. במכללה גדולה, הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצוהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים.

בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א' וכל תלמידי שנה ב'.

על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א'. עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א' שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.

נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א' הוא בעד ההצעה, גדולה ב- $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב' הוא בעד ההצעה.

ב. חשבו את הערך של p .

ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל. חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה:

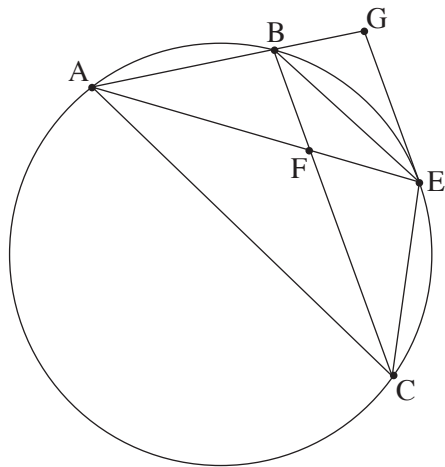
I. המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב'. II. המשתתף שנבחר בעד ההצעה.

ד. בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל.

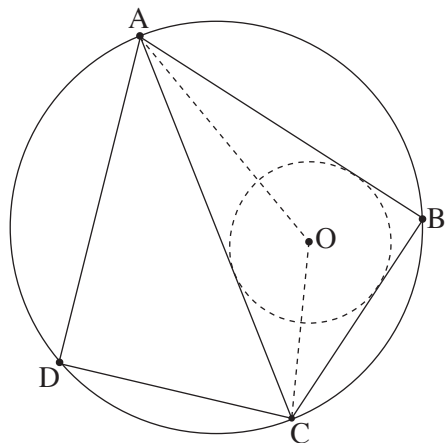
ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם תלמידי שנה ב'.

מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



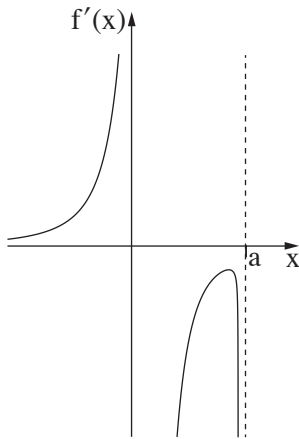
4. הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל.
 נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם.
 נקודה E מעבירים משיק למעגל.
 המשיק חותך את המשיך המיתר AB בנקודה G.
 המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.
 א. הוכיחו: $\triangle ACE \sim \triangle AEG$.
 נתון: $AG = 6$, $AE = 3\sqrt{6}$.
 ב. חשבו את אורך המיתר AC.
 ג. הוכיחו: $BC \parallel GE$.
 נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE.
 ד. חשבו את אורך המיתר AB.
 ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC? נמקו את תשובתכם.



5. דלתון ABCD חסום במעגל שרדיוסו R.
 המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון.
 הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט).
 נסמן: $\angle CAB = \alpha$.
 א. (1) מצאו את זווית המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).
 (2) הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו-R.
 נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.
 ב. מצאו את גודל הזווית α .
 נתון כי שטח הדלתון הוא $25\sqrt{3}$.
 ג. מצאו את R.
 ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החסום את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2a - x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.
- א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
- (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.
 - (2) הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי-זוגית.
 - (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.
 - (4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.
 - (5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה (U) ואת תחום הקעירות כלפי מטה (\cap) של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- נתונה גם הפונקצייה $g(x) = |f(x)| - b$, b הוא פרמטר חיובי.
- הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.
- ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.
- ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ היא: $(-3, 2)$.
- ד. מצאו את הערכים של a ו- b .
- נתונה גם הפונקצייה $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, המוגדרת בתחום $x > 1$.
- ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.



7. נתונה הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \neq 0, x \leq a$. הוא פרמטר חיובי. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x < a, x \neq 0$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן: $x = 0, x = a, y = 0$. בתחום $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה. הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקצייה $f(x)$. $f(a) = 0$.

- א. (1) מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקצייה $f(x)$ (הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך). נמקו.
 (2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

- ב. סרטוטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתת-סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים I–IV שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$
II. $\frac{\sqrt{x-a}}{x^2}$
III. $\frac{\sqrt{a-x}}{x}$
IV. $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$

- ג. איזה מן הביטויים I–IV מייצג את הפונקצייה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -2$, הוא: $\frac{7}{16}$.

- ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$.

8. נתון מעוין ABCD. נקודה E היא אמצע הצלע BC. נסמן: $\sphericalangle ECD = x$.

נתון: שטח המשולש ECD הוא 18.

- א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.
 ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

בהצלחה!