

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

ב. ליונתן יש בספרייה שבחדרו ספרים משני סוגים: ספרי קומיקס וספרי עיון.

30% מן הספרים הם ספרי קומיקס והשאר ספרי עיון.

80% מן הספרים הם בעברית והשאר באנגלית.

לפניכם שתי טענות I-II. קבעו בעבור כל אחת מהן אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעותיכם.

I. ליונתן אין ספרי קומיקס בעברית.

II. ההסתברות לבחור באקראי ספר בעברית מבין ספרי הקומיקס גדולה מן ההסתברות לבחור באקראי ספר קומיקס

מבין הספרים שבעברית.

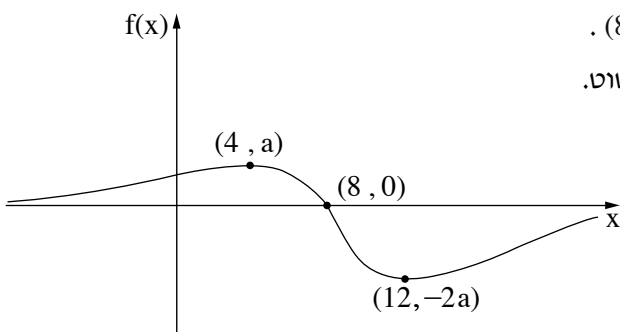
ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$, המוגדרת לכל x .

לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת בלבד, שמשוואתה $y = 0$,

ונקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x , ששיעוריה הם $(8, 0)$.

שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ מוצגים בסרטוט.

a הוא פרמטר גדול מ-1.



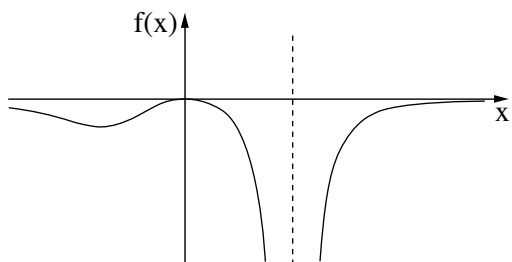
$$g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$$

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתון כי לישר $y = \frac{a}{8}$ ולגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק 3 נקודות משותפות.

(3) מצאו את הערך של a .



7. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \frac{-36x^2}{(x^3 - 8)^2}$, המוגדרת בתחום $x \neq 2$.

בסרטוט מוצגות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך

עם ציר ה- x של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x) = f(x)$.

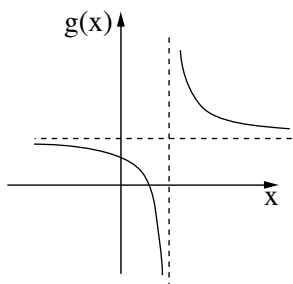
$g(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 2$.

נתון כי גרף הפונקצייה $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(0, 0.5)$.

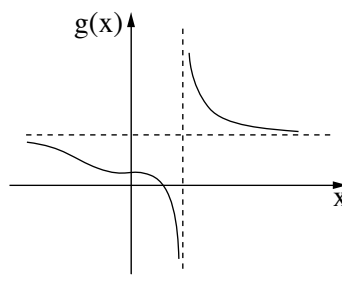
(1) מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

(2) אחד מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

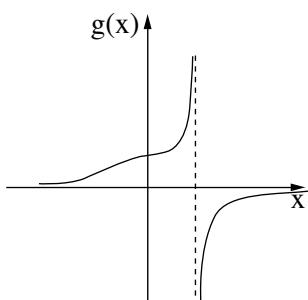
קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



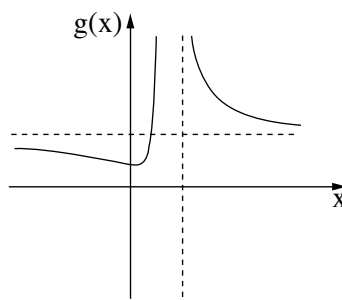
II



I



IV



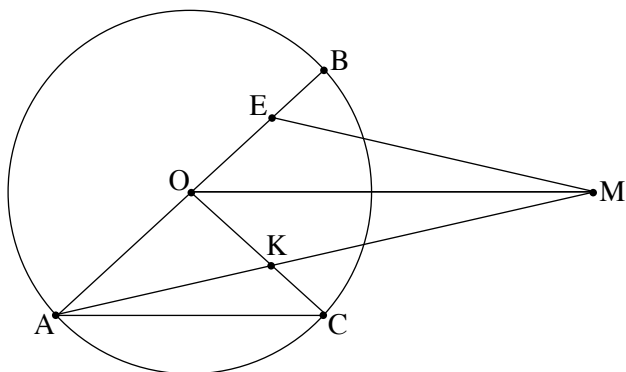
III

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2. a_n היא סדרה הנדסית איך־סופית עולה שמנתה היא q .
 b_n היא סדרה הנדסית איך־סופית עולה שמנתה היא $2q$.
 c_n היא סדרה איך־סופית שאיבריה מקיימים $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.
 א. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו באמצעות q את מנתה.
 נתון: $a_1 = b_1$, $c_2 = \frac{2}{9} \cdot (a_1)^2$.
 ב. מצאו את הערך של q .
 ג. (1) האם הערך של a_1 הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.
 (2) האם הסדרה c_n עולה או יורדת? נמקו את תשובתכם.
 נסמן ב־ S_1 את סכום הסדרה a_n , ב־ S_2 את סכום הסדרה b_n וב־ S_3 את סכום הסדרה c_n .
 נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 189$.
 ד. מצאו את הערך של a_1 .

3. בשק א' ובשק ב' יש כדורים משני סוגים: כדורים רכים וכדורים קשים.
 בשק א' יש 10 כדורים, מתוכם 2 כדורים רכים והשאר קשים.
 בשק ב' יש 14 כדורים, מתוכם x כדורים רכים והשאר קשים.
 גלית בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).
 נתון כי ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא $\frac{29}{200}$.
 א. מצאו את הערך של x .
 ב. ידוע שגלית הוציאה שני כדורים מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני כדורים משק א'?
 גלית מבצעת את התהליך המתואר לפניכם 4 פעמים:
 היא בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).
 ג. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בדיוק בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים?
 ד. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים ובשתיים מן הפעמים רק כדורים רכים?

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.

AB הוא קוטר במעגל.

הנקודה C נמצאת על המעגל.

הנקודה M נמצאת מחוץ למעגל

כך שהקטע AM חותך את הקטע CO בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על הקטע BO כך שהמרובע EMKO

הוא דלתון ($MK = ME, OK = OE$).

א. הוכיחו כי $BC \parallel EK$.

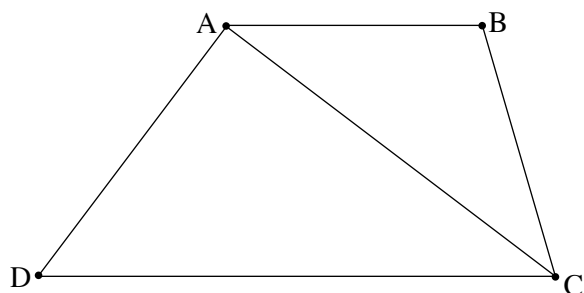
ב. הוכיחו כי $OM \parallel AC$.

נתון: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$.

ג. מצאו את הערך של $\frac{OM}{AC}$.

נסמן ב-S את שטח הדלתון EMKO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AOC.



5. בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD ($AB \parallel DC$).

נתון כי אורך הבסיס AB שווה לאורך הצלע BC.

נסמן: $AB = BC = k, \angle ACB = \alpha, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos \alpha$.

נתון: $DC = 2k, AD = 1.2k$.

ב. מצאו את הערך של α .

ג. מצאו את גודל הזווית ADC.

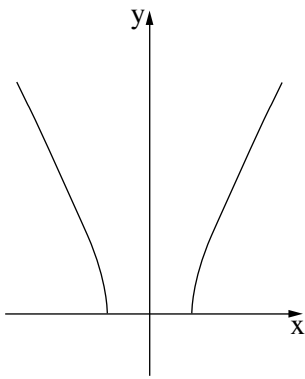
המשכי הצלעות DA ו-CB נחתכים בנקודה E.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל החסום במשולש EDC הוא 8.

ד. מצאו את הערך של k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{ax}{(x-5)^2}$, המוגדרת בתחום $x \neq 5$.
 a הוא פרמטר חיובי.
- א. ענו על התת-סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
 (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) + 0.5$, המוגדרת בתחום $x \neq 5$.
 נתון כי לגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה- x .
 ג. מצאו את הערך של a .
 הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.
 נתונה הפונקצייה $h(x) = g(x) \cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x \neq 5$.
 ד. (1) רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $h(x)$.
 (2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-15 \leq x \leq 0$.
7. נתונה הפונקצייה $f(x) = (1 + \cos x) \cdot (-1 + b \cos x)$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 b הוא פרמטר.
 נתון: $0 < b < 1$.
- א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.
 ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.
 ג. מצאו את הערך של b .
 הציבו $b = \frac{1}{2}$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ה.
 ד. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 נתונה הפונקצייה $h(x) = f(x) + |f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקצייה $h(x)$.
 ה. האם שיעור ה- y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4}$.

נתון הישר $y = 3x - 6$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.

דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר המקביל לציר ה־y וחותך את הישר הנתון בנקודה B.

ישר המקביל לציר ה־x וחותך את הישר הנתון בנקודה C.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

ג. (1) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC.

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו־AC הוא מקסימלי.

בהצלחה!