בני גורן

bennygoren.co.il

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

קיץ תשפ"ו 2026, מועד א', שאלון 35571 (גרסה 05) ב

נכתב על-ידי רגב אס

שאלה 1 – שאלות קצרות

סעיף א' - אינדוקציה

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

נוכיח נכונות הטענה עבור $n=1$:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1(1+1)}{2(2+1)}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

הטענה נכונה עבור $n=1$.

נניח נכונות הטענה עבור $n=k$:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

נוכיח נכונות הטענה עבור $n = k + 1$:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

נוציא גורם משותף באגף השמאלי:

$$\frac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

$$\frac{(k+1)[(2k^2+3k)+2(k+1)]}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

$$\frac{(k+1)[2k^2+3k+2k+2]}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

$$\frac{(k+1)[(2k+1)(k+2)]}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

הטענה מתקיימת עבור $n = k + 1$.

הוכחנו נכונות הטענה עבור $n = 1$ ואת נכונות הטענה עבור $n = k + 1$ על סמך הנחת האינדוקציה. מכאן שהטענה נכונה לכל n טבעי.

<u>סעיף ב' – הסתברות</u>

נתבונן בטבלה הדו-ממדית על-פי הנתונים:

	קומיקס	עיון	
עברית	X		0.8
אנגלית			0.2
	0.3	0.7	1

טענה ראשונה: "ליונתן אין ספרי קומיקס בעברית". טענה זו אינה נכונה.

נימוק: גם אם כל הספרים באנגלית הם ספרי קומיקס – עדיין ישנם ספרי קומיקס בעברית.

טענה שנייה: "ההסתברות לבחור באקראי ספר בעברית מבין ספרי הקומיקס גדולה מן ההסתברות לבחור באקראי ספר קומיקס מבין הספרים שבעברית". טענה זו נכונה.

נימוק: נסתכל על המאורעות המותנים:

$$P\left(\text{עברית}/\text{קומיקס}\right)=\frac{P\left(\text{קומיקס}\cap\text{עברית}\right)}{P\left(\text{קומיקס}\right)}$$

$$P\left(\text{קומיקס}/\text{עברית}\right)=\frac{P\left(\text{קומיקס}\cap\text{עברית}\right)}{P\left(\text{עברית}\right)}$$

נגדיר $x=P\left(\text{קומיקס}\cap\text{עברית}\right)$ ונקבל:

$$\frac{P\left(\text{קומיקס}\cap\text{עברית}\right)}{P\left(\text{קומיקס}\right)}=\frac{x}{0.3}=3.333x$$

$$\frac{P\left(\text{קומיקס}\cap\text{עברית}\right)}{P\left(\text{עברית}\right)}=\frac{x}{0.8}=1.25x$$

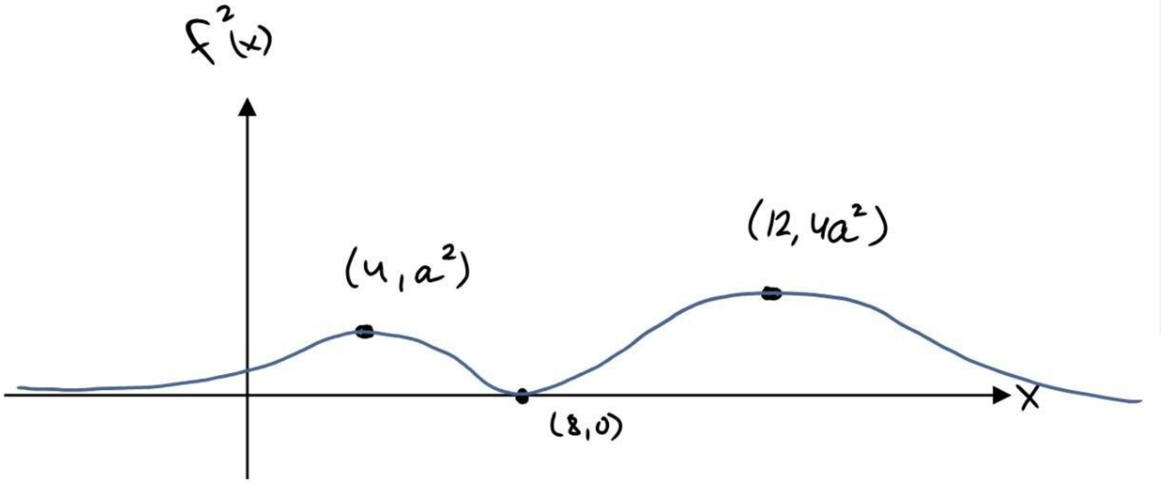
הביטוי $P\left(\text{עברית}/\text{קומיקס}\right)$ גדול מהביטוי $P\left(\text{קומיקס}/\text{עברית}\right)$.

<u>סעיף ג' – חדו"א</u>

(1) כדי למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ נבדוק מתי המכנה של הפונקציה מתאפס ($f(x)=0$) לפי הסרטוט הנתון:

$x \neq 8$

(2) כדי לסרטט את הפונקציה $g(x)$ נרצה ראשית להסתכל על הפונקציה $(f(x))^2$:

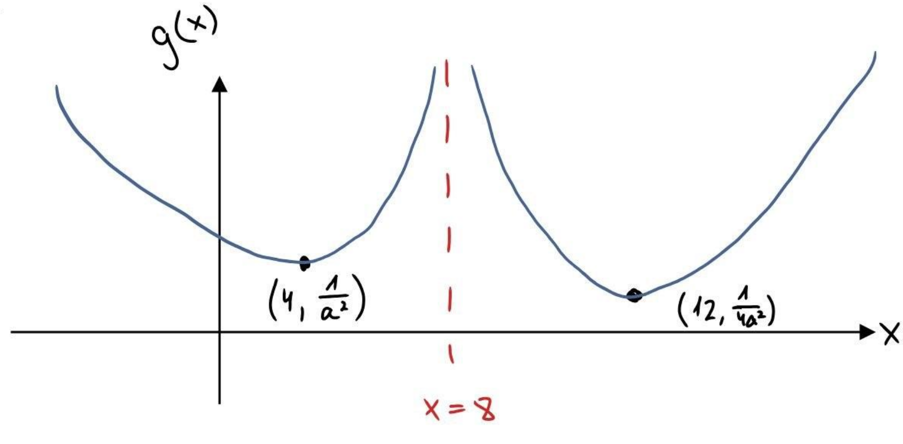


בעת נסרטט את $\frac{1}{(f(x))^2}$ לפי שני עקרונות:

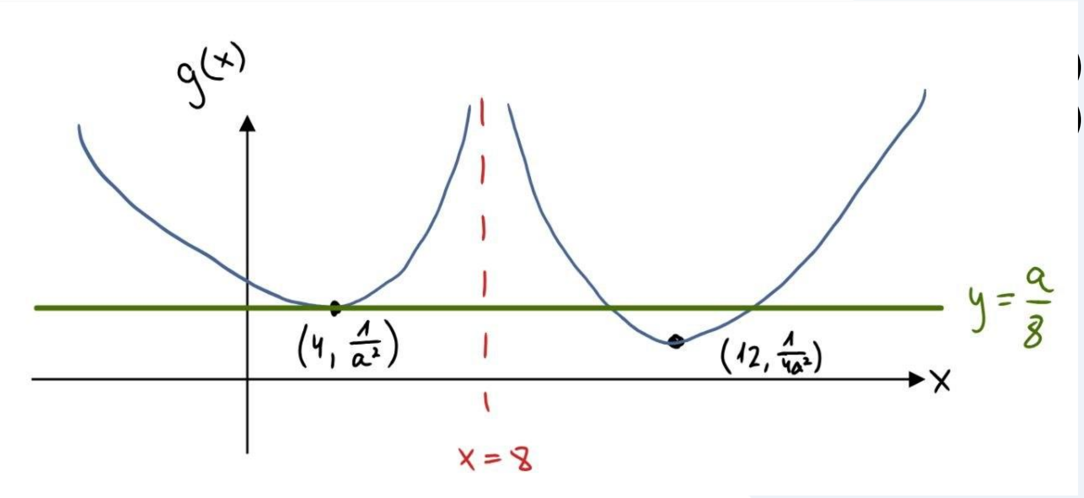
א. הפונקציה חיובית תמיד.

ב. לפונקציה תחומי עליה-ירידה הפוכים מאלו של $(f(x))^2$ משום שכל ערך y יהי בעת ההפכי (ככל שהערך היה גדול יותר כך הוא יהיה בעת קטן יותר ולהיפך).

ג. לא תהיה אסימפטוטה אופקית משום שבעת המונה ישאף לאינסוף מהר יותר מהמכנה.



(3) לפונקציה יש שלושה פתרונות רק בערך של נקודת הקיצון הגבוהה שלה $\left(4,\frac{1}{a^2}\right)$.



לכן, נוכל להשוות בין ערכי ה-y ולמצוא את a:

$$\frac{1}{a^2}=\frac{a}{8}$$

$$a^3=8$$

$$a=2$$

סעיף ד' – חדו"א

בסרטוט מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{-36x^2}{(x^3-8)^2}$.

נתון: $g'(x)=f(x)$

(1) נמצא פונקציה $g(x)$ המקיימת $g(0)=\frac{1}{2}$ בעזרת אינטגרל:

$$g(x)=\int f(x)dx=\int\frac{-36x^2}{(x^3-8)^2}dx$$

נגדיר משתנה t בעזרתו נוכל לבצע אינטגרל המכיל נגזרת פנימית:

$$t=x^3-8$$

$$dt=3x^2\cdot dx$$

נביע את המונה של הפונקציה באמצעות dt:

$$-12dt=-12(3x^2\cdot dx)=-36x^2\cdot dx$$

נכתוב שוב את האינטגרל בעזרת t:

$$\int\frac{-12}{t^2}dt=-12\int t^{-2}dt$$

כעת נוכל לבצע את האינטגרציה:

$$-12\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]+c=-12\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)+c=\frac{12}{t}+c$$

נחזור למשתנה x:

$$g(x)=\frac{12}{t}+c=\frac{12}{x^3-8}+c$$

נציב את הנתון $g(0)=\frac{1}{2}$ ונמצא את קבוע האינטגרציה c:

$$g(0)=\frac{12}{-8}+c=\frac{1}{2}$$

$$c=2$$

$$g(x)=\frac{12}{x^3-8}+2$$

(2) הגרף המתאר את הפונקציה $g(x)$ שמצאנו הוא גרף I.

נשים לב לגרף הפונקציה $f(x)$ שהיא הנגזרת של $g(x)$:

א. $f(x)$ תמיד שלילית ולכן $g(x)$ תמיד יורדת.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש קיצון ב $x = 0$ ולכן השיפוע של $g(0)$ הוא 0.

שאלה 2

סעיף א'

נתון $c_n = a_n \cdot b_n$.

נוכיח כי הסדרה c_n הנדסית לפי המנה בין שני איברים כלליים סמוכים בסדרה:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} = q \cdot 2q = 2q^2$$

קיבלנו כי מנת הסדרה c_n אינו תלוי ב-n, לכן נוכל לומר כי סדרה זו הנדסית ומנתה $2q^2$.

סעיף ב'

נתון $a_1 = b_1$, $c_2 = \frac{2}{9} \cdot (a_1)^2$.

נמצא את הערך של q לפי היחס בין c_2 ו-c_1:

$$2q^2 = \frac{c_2}{c_1}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\frac{2}{9} \cdot (a_1)^2}{a_1 \cdot b_1} = \frac{\frac{2}{9} \cdot (a_1)^2}{(a_1)^2} = \frac{2}{9}$$

$$2q^2 = \frac{2}{9}$$

$$q^2 = \frac{1}{9}$$

נקבל שני פתרונות:

$$q_{1,2} = \pm\frac{1}{3}$$

מכיוון והסדרות a_n ו- b_n עולות נוכל לפסול את התשובה השלילית ולבסוף נקבל:

$$q = \frac{1}{3}$$

<u>סעיף ג'(1)</u>

משום שהסדרה a_n עולה והמנה שלה היא שבר נוכל לקבוע כי הערך של a_1 הוא שלילי.
נימוק: כפל של מספר שלילי בשבר מגדיל את המספר השלילי.

<u>סעיף ג'(2)</u>

המנה של c_n היא $\frac{2}{9}$. נקבע את סימן האיבר הראשון c_1:

$$c_1 = a_1 \cdot b_1 = (a_1)^2$$

האיבר c_1 חיובי ולכן הסדרה c_n היא סדרה יורדת.

<u>סעיף ד'</u>

נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 189$.

נמצא את הערך של a_1 על ידי שימוש בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופי מתכנסת משום שבכל שלוש הסדרות $0 < q < 1$:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_1 = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_2 = \frac{b_1}{1-2q} = \frac{a_1}{1-2q}$$

$$S_3 = \frac{c_1}{1-(2q^2)} = \frac{(a_1)^2}{1-(2q^2)}$$

נציב את הביטויים בנתון ונציב גם $q = \frac{1}{3}$:

$$\frac{a_1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{a_1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{(a_1)^2}{1-\frac{2}{9}} = 189$$

$$\frac{a_1}{\frac{2}{3}} + \frac{a_1}{\frac{1}{3}} + \frac{(a_1)^2}{\frac{7}{9}} = 189$$

נסדר את השברים:

$$\frac{3a_1}{2} + 3a_1 + \frac{9(a_1)^2}{7} = 189$$

מכנה משותף:

$$63a_1 + 18(a_1)^2 = 2646$$

נסדר את המשוואה הריבועית ונפתור בעזרת טרינום:

$$18(a_1)^2 + 63a_1 - 2646 = 0$$

נקבל שני פתרונות:

$$a_1 = \frac{21}{2} \quad ; \quad a_1 = -14$$

אנו כבר יודעים כי ערך a_1 שליל ולכן התשובה הנכונה היא:

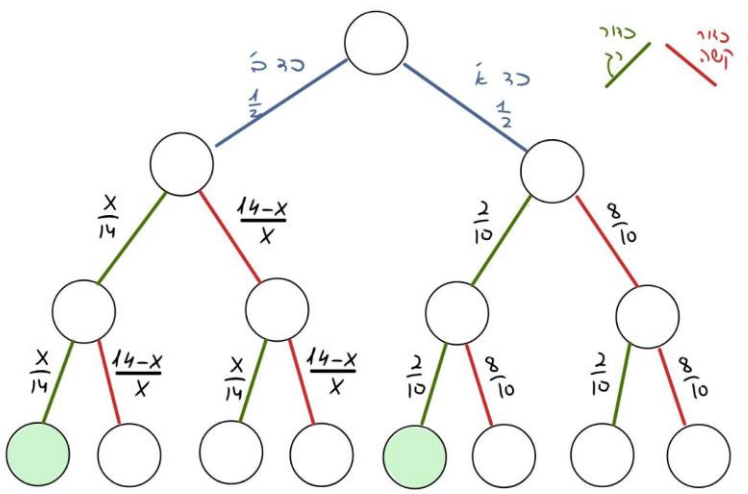
$$a_1 = -14$$

שאלה 3

סעיף א'

נתון: ההסתברות להוציא שני כדורים רכים היא $\frac{29}{200}$.

נשים לב כי הסתברות זו כוללת את האפשרות להוציא את שניהם מכד א' או מכד ב'.



$$P(\text{2 רכים}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{14}\cdot\frac{x}{14} = \frac{29}{200}$$

$$\frac{4}{200} + \frac{x^2}{392} = \frac{29}{200}$$

$$\frac{x^2}{392} = \frac{25}{200}$$

$$x^2 = \frac{9800}{200} = 49$$

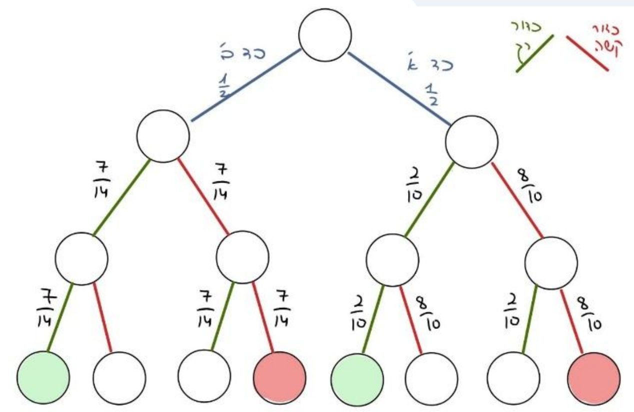
$$x = 7$$

<u>סעיף ב'</u>

ידוע כי גלית הוציאה שני כדורים מאותו הסוג, כלומר זוהי הסתברות מותנית:

$$P\left(\text{כדורים זהים/כד א}\right)=\frac{P\left(\text{כדורים זהים מכד א}\right)}{P\left(\text{כדורים זהים}\right)}$$

נחשב בנפרד את ההסתברות לכל אחד מהמאורעות. ראשית שני כדורים זהים. אנו כבר יודעים את ההסתברות לשני כדורים רכים, נחשב את ההסתברות לשני כדורים קשים:

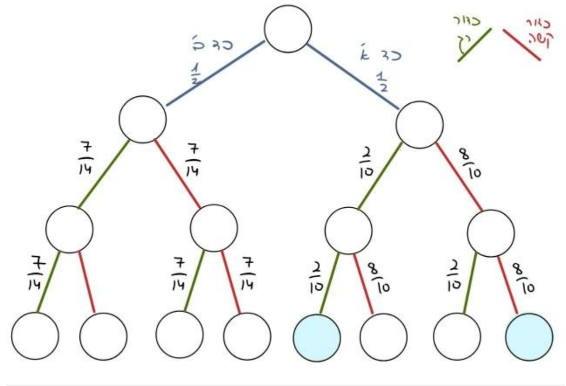


$$P\left(\text{2 כדורים קשים}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{14}\cdot\frac{7}{14}=\frac{89}{200}$$

$$P\left(\text{2 כדורים זהים}\right)=P\left(\text{2 כדורים קשים}\right)+P\left(\text{2 כדורים רכים}\right)=\frac{89}{200}+\frac{29}{200}$$

$$P\left(\text{2 כדורים זהים}\right)=\frac{59}{100}$$

כעת נחשב את ההסתברות להוציא שני כדורים זהים מכד א' בלבד:



$$P(\text{כדורים זהים מכד א}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{64}{200}+\frac{4}{200}=\frac{34}{100}$$

נחזור להסתברות המותנית:

$$\frac{P(\text{כדורים זהים מכד א})}{P(\text{כדורים זהים})}=\frac{\frac{34}{100}}{\frac{59}{100}}=\frac{34}{59}\sim 0.576$$

<u>סעיף ג'</u>

נוכל לחשב את ההסתברות שגלית הוציאה בדיוק שני כדורים קשים מתוך ארבעה ניסיונות

בעזרת נוסחת ברנולי:

$$P_n(k)=\binom{n}{k}\cdot P^k\cdot(1-P)^{n-k}$$

במקרה שלנו $n = 4$, $k = 2$. נמצא את P המתאים לתהליך:

$$P(\text{2 כדורים קשים})=\frac{89}{200}$$

$$P_4(2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{89}{200}\right)^2\cdot\left(\frac{111}{200}\right)^2$$

$$P_4(2)=6\cdot\frac{7921}{40000}\cdot\frac{12321}{40000}\sim 0.366$$

סעיף ד'

הפעם נרצה לבדוק כיצד גלית יכולה להוציא בפעמיים מתוך ארבע הנסיונות שני כדורים קשים ופעמיים האחרות שני כדורים רכים. נוכל לרשום את ההסתברות לכך באופן הבא:

$$P(\text{2 כדורים רכים}) \cdot P(\text{2 כדורים רכים}) \cdot P(\text{2 כדורים קשים}) \cdot P(\text{2 כדורים קשים})$$

ההסתברויות כבר ידועות לנו והן:

$$\left(\frac{89}{200}\right)^2 \cdot \left(\frac{29}{200}\right)^2 \sim 0.00416$$

אלא שעלינו להתחשב בעובדה שאנו לא יודעים מהו הסדר בו הוציא גלית את הכדורים.

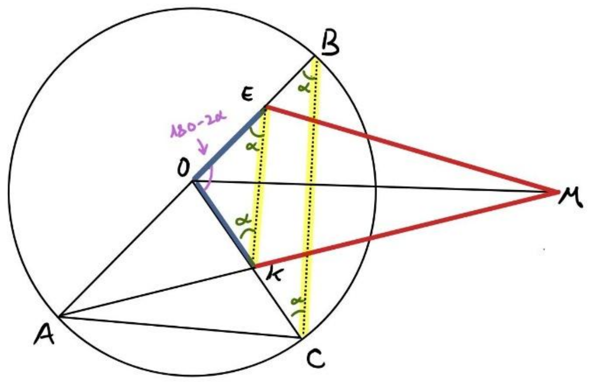
נסמן באות **ר'** את ההסתברות לשני כדורים רכים ובאות **ק'** את ההסתברות לשני כדורים קשים. נרשום את האפשרויות השונות:

(ר, ר, ק, ק) , (ר, ק, ק, ר) , (ר, ק, ר, ק) , (ק, ק, ר, ר) , (ק, ר, ר, ק) , (ק, ר, ק, ר)

כלומר, יש בסה"כ 6 אפשרויות, לכן נכפיל את ההסתברות שקיבלנו ב- 6:

$$6 \cdot \left(\frac{89}{200}\right)^2 \cdot \left(\frac{29}{200}\right)^2 \sim 0.024$$

הערה: ניתן לחשב את מספר האפשרויות גם בעזרת הבינום של ניוטון $\binom{4}{2} = 6$.



שאלה 4

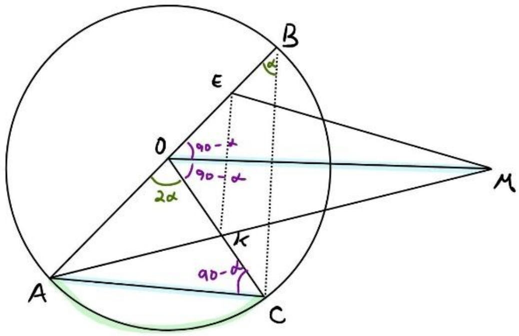
נתון: AB קוטר במעגל שמרכזו O.

$EMKO$ הוא דלתון ($OK = OE$; $MK = ME$).

סעיף א'

הוכיחו: $BC \parallel EK$.

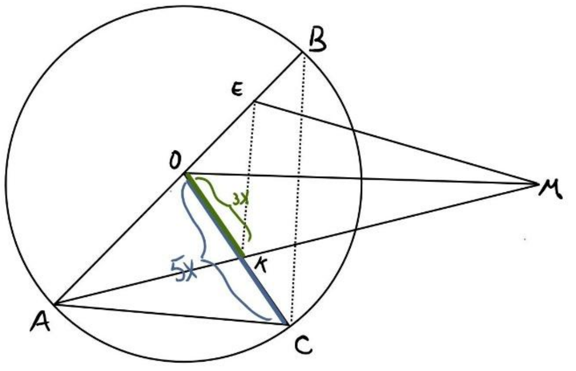
טענה	נימוק
נגדיר $\measuredangle OEK = \alpha$	סימון
$OK = OE$	נתון
$\measuredangle OEK = \measuredangle OKE = \alpha$	זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים
$\measuredangle EOK = 180 - 2\alpha$	סכום זוויות במשולש ΔOEK
$MK = ME$	נתון
$\measuredangle OBC = \measuredangle OCB$	זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים
$\measuredangle OCB = \dfrac{180 - (180 - 2\alpha)}{2}$	סכום זוויות במשולש ΔOBC
$\measuredangle OBC = \measuredangle OCB = \alpha$	חישוב
$\measuredangle OCB = \measuredangle OKE = \alpha$	כלל המעבר
$BC \parallel EK$	זוויות מתאימות שוות



<u>סעיף ב'</u>

הוכיחו: $AC \parallel OM$.

טענה	נימוק
$\sphericalangle OBC = \alpha$	הוכחנו כבר
$\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle OBC = 2\alpha$	זווית היקפית שווה לחצי מהזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת
$AO = OC = R$	הרדיוסים במעגל שווים
$\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA$	זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים
$\sphericalangle OCA = \dfrac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$	סכום זוויות במשולש ΔOBC
$\sphericalangle EOK = 180 - 2\alpha$	הוכחנו כבר
דלתון $EMKO$	נתון
$\sphericalangle KOM = \dfrac{1}{2}\sphericalangle EOK = \dfrac{180 - 2\alpha}{2}$	האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש
$\sphericalangle KOM = 90 - \alpha$	חישוב
$\sphericalangle OCA = \sphericalangle KOM = 90 - \alpha$	כלל המעבר
$AC \parallel OM$	זוויות מתחלפות שוות



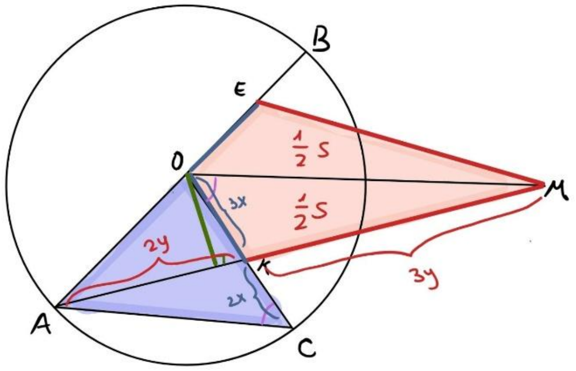
סעיף ג'

נתון: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$

מצאו את הערך: $\frac{OM}{AC}$

טענה	נימוק
$BC \parallel EK$	הוכחנו כבר
$\frac{OC}{OK} = \frac{OB}{OE} = \frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$	משפט תאלס הרחבה ראשונה במשולש ΔOBC + נתון
$\frac{OC}{OK} = \frac{5x}{3x}$	סימון
$CK = OC - OK$	חיסור קטעים
$CK = 5x - 3x = 2x$	חישוב
$AC \parallel OM$	הוכחנו כבר
$\frac{OM}{AC} = \frac{MK}{AK} = \frac{OK}{CK}$	משפט תאלס הרחבה שנייה (שעון חול)
$\frac{OK}{CK} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$	הצבה
$\frac{OM}{AC} = \frac{3}{2}$	כלל מעבר

סעיף ד'



נסמן: $S_{EMKO} = S$

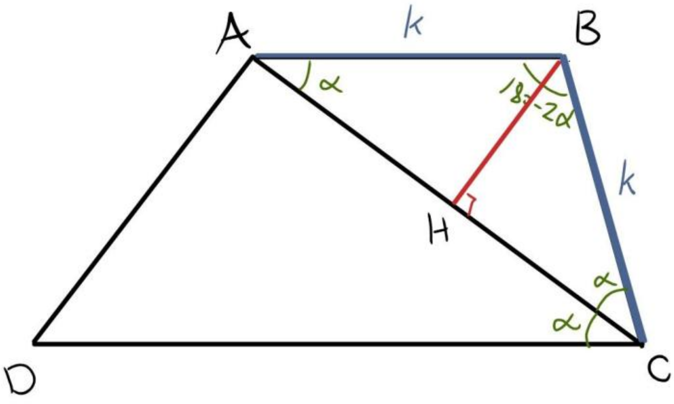
הביעו באמצעות S את שטח המשולש AOC

טענה	נימוק
$MK = ME$	נתון (צ)
$OK = OE$	נתון (צ)
$OM = OM$	צלע משותפת (צ)
$\Delta OEM \cong \Delta OKM$	חפיפת משולשים צ.צ.צ
$S_{OEM} = S_{OKM} = \frac{1}{2}S$	למשולשים חופפים שטחים שווים + חיסור שטחים
$\sphericalangle OCA = \sphericalangle KOM = 90 - \alpha$	הוכחנו כבר (ז)
$\sphericalangle OKM = \sphericalangle AKC$	זוויות קודקודיות (ז)
$\Delta OKM \sim \Delta CKA$	משולשים דומים לפי ז.ז.
$\frac{OM}{AC} = \frac{MK}{AK} = \frac{OK}{CK} = \frac{3}{2}$	יחס הדמיון בין משולשים דומים
$\frac{S_{OKM}}{S_{CKA}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה ליחס הדמיון בריבוע
$\frac{\frac{1}{2}S}{S_{CKA}} = \frac{9}{4}$	
$S_{CKA} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{2}{9}S$	חישוב
בניית עזר OH גובה במשולש AOM	

$\frac{S_{OKM}}{S_{OKA}} = \frac{\frac{h \cdot MK}{2}}{\frac{h \cdot AK}{2}} = \frac{MK}{AM} = \frac{3}{2}$	
$\frac{\frac{1}{2}S}{S_{OKA}} = \frac{3}{2}$	
$S_{OKA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{3}S$	חישוב
$S_{OCA} = S_{CKA} + S_{OKA}$	חיבור שטחים
$S_{OCA} = \frac{2}{9}S + \frac{1}{3}S = \frac{5}{9}S$	חישוב

שאלה 5

סעיף א'



נתון: ABCD טרפז $(AB \parallel CD)$

$AB = BC = k$

$\sphericalangle ACB = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$

עלינו להראות כי $AC = 2k \cdot \cos\alpha$

ראשית נוריד גובה BH במשולש ABC.

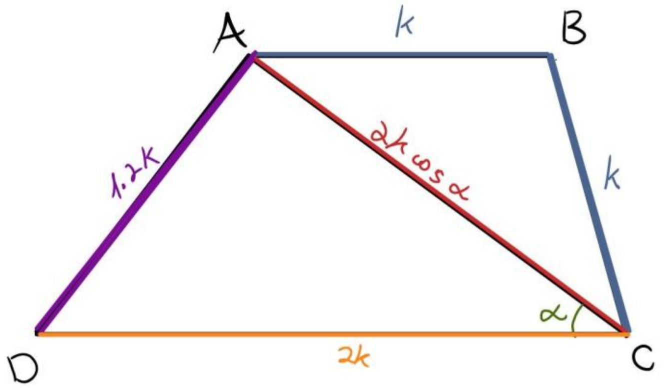
משום שזהו משולש שווה שוקיים הגובה הוא גם תיכון וגם חוצה זווית.

לכן, נרצה למצוא את HC במשולש BHC:

$$\cos\alpha = \frac{HC}{BC} = \frac{HC}{k}$$

$$HC = k \cdot \cos\alpha$$

$$AC = 2HC = 2k \cdot \cos\alpha$$



סעיף ב'

נתון: $DC = 2k$, $AD = 1.2k$

נמצא את ערך הזווית α עם משפט הקוסינוסים במשולש ADC בו יש ביטויים לכל הצלעות.

נשים לב גם כי הזווית $\alpha = \sphericalangle ACD$ משום שהיא מתחלפת עם $\sphericalangle BAC$, שהיא זווית בסיס במשולש שווה שוקיים ABC.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

נציב בנוסחה:

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos\alpha$$

$$(1.2k)^2 = (2k \cdot \cos\alpha)^2 + (2k)^2 - 2 \cdot 2k \cdot \cos\alpha \cdot 2k \cdot \cos\alpha$$

$$1.44k^2 = 4k^2(\cos\alpha)^2 + 4k^2 - 8k^2(\cos\alpha)^2$$

נצמצם מהמשוואה את k^2:

$$1.44 = 4(\cos\alpha)^2 + 4 - 8(\cos\alpha)^2$$

$$4(\cos\alpha)^2 = 2.56$$

$$(\cos\alpha)^2 = 0.64$$

נמצא שני פתרונות למשוואה:

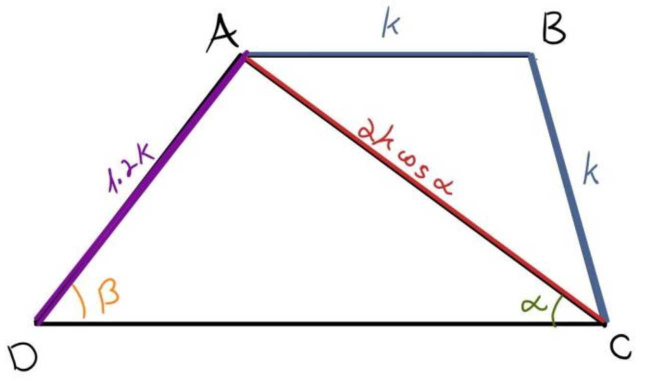
$$\cos\alpha = \pm 0.8$$

משום שנתון כי $0° < \alpha < 90°$ אז הפתרון יהיה:

$$\alpha = 36.87°$$

<u>סעיף ג'</u>

נגדיר: $\sphericalangle ADC = \beta$



נחשב את הזווית ADC בעזרת משפט הסינוסים במשולש ADC:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin(36.87°)}$$

נציב את הביטויים של AC ו- AD:

$$\frac{2k \cdot \cos(36.87°)}{\sin\beta} = \frac{1.2k}{\sin(36.87°)}$$

נבודד את $\sin\beta$:

$$\sin\beta = \frac{2k \cdot \cos(36.87°) \cdot \sin(36.87°)}{1.2k} = \frac{0.96}{1.2}$$

$$\sin\beta = 0.8$$

$$\sphericalangle ADC = \beta = 53.13°$$

סעיף ד'

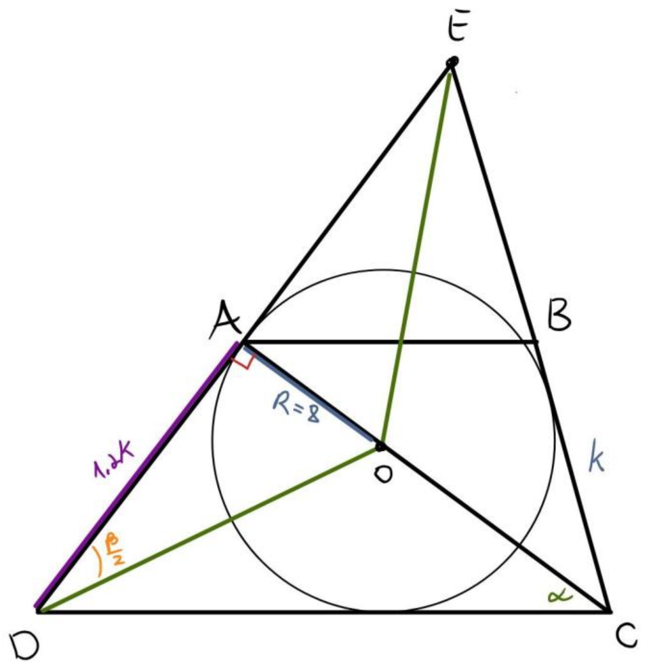
מרכז המעגל O החסום במשולש EDC הוא מפגש חוצי הזווית של המשולש.

כלומר, מרכז המעגל נמצא על הקטע AC משום שהקטע AC חוצה זווית.

נשים לב כי $\alpha + \beta = 90°$. מכאן שהזווית CAD היא זווית ישרה (סכום זוויות במשולש).

המשמעות היא שהקטע AC מאונך לצלע DE.

אם רדיוס המעגל נמצא על הקטע AC אז DE הוא משיק למעגל בנקודה A. (קטע המאונך לרדיוס בנקודת המפגש שלהם הוא משיק למעגל).



נסתכל על המשולש AOD שהוא משולש ישר זווית:

$$\tan\left(\frac{53.13}{2}\right) = \frac{AO}{AD} = \frac{8}{1.2k}$$

$$1.2k = \frac{8}{\tan\left(\frac{53.13}{2}\right)} = 16$$

$$k = \frac{16}{1.2} = 13\frac{1}{3}$$

שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax}{(x-5)^2}$ המוגדרת בתחום $x \neq 5$. a פרמטר חיובי.

סעיף א'(1)

אסימפטוטה אנכית מתקבלת כאשר המכנה מתאפס: $x = 5$

אסימפטוטה אופקית תתקבל ב $y = 0$ משום שהמעלה הגבוהה במכנה גדולה מהמעלה הגבוהה במונה.

סעיף א'(2)

נגזור את הפונקציה כדי למצוא קיצון. נגדיר:

$$u = ax \quad ; \quad v = (x-5)^2$$

$$u' = a \quad ; \quad v' = 2(x-5)$$

$$f'(x) = \frac{a(x-5)^2 - 2ax(x-5)}{(x-5)^4}$$

נסדר את הנגזרת עם גורם משותף:

$$f'(x) = \frac{a(x-5)[(x-5) - 2x]}{(x-5)^4}$$

$$f'(x) = \frac{a(x-5)(-x-5)}{(x-5)^4} = -\frac{a(x-5)(x+5)}{(x-5)^4}$$

$$f'(x) = -\frac{a(x+5)}{(x-5)^3}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר המונה שלה מתאפס:

$$a(x+5) = 0$$

$$x = -5$$

נציב בפונקציה כדי למצוא את ערך הפונקציה בנקודה זו:

$$f(-5)=\frac{-5a}{(-5-5)^2}=\frac{-5a}{100}=-\frac{a}{20}$$

נקודת הקיצון היא $\left(-5,-\frac{a}{20}\right)$, כעת נקבע את סוגה בעזרת טבלת עליה-ירידה:

x	$x<$	-5	$<x<$	5	$<x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$
$f(x)$	↘	min	↗		↘

$$f'(-6)=-\frac{a(-6+5)}{(-6-5)^3}=\frac{a}{\text{שלילי}}<0$$

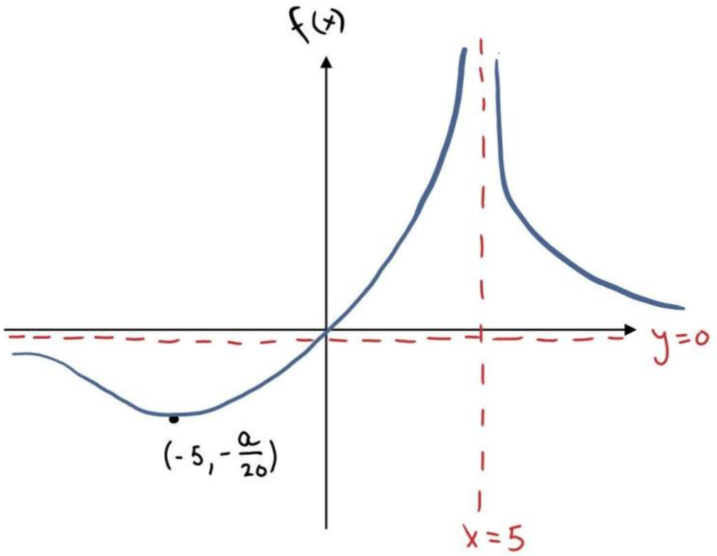
$$f'(0)=-\frac{a(0+5)}{(0-5)^3}=-\frac{5a}{\text{שלילי}}>0$$

$$f'(6)=-\frac{a(6+5)}{(6-5)^3}=-\frac{11a}{\text{חיובי}}<0$$

קיבלנו כי הנקודה $\left(-5,-\frac{a}{20}\right)$ היא נקודת מינימום.

<u>סעיף ב'</u>

נסרטט את הפונקציה:



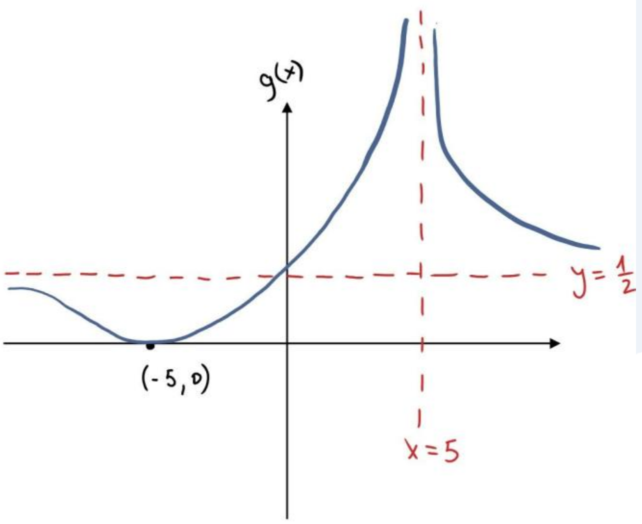
סעיף ג'

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 0.5$ המוגדרת בתחום $x \neq 5$.

מדובר בהזזה אנכית שאחריה יש לפונקציה נקודה אחת משותפת עם ציר ה- x.

הנקודה היחידה שיכולה לקיים את התיאור היא נקודת המינימום שמצאנו, לכן ההזזה היא

על פי ערך הפונקציה בנקודה זו: $-\frac{a}{20}$. נזיז את הפונקציה $\frac{a}{20}$ יחידות כלפי מעלה.



$$\frac{a}{20} = \frac{1}{2}$$

$$a = 10$$

סעיף ד'(1)

נתונה הפונקציה $h(x) = g(x) \cdot g'(x)$ המוגדרת בתחום $x \neq 5$.

נוכל לקבוע את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה לפי המכפלה בין $g(x)$ ל- $g'(x)$.

במקרה הזה $g(x)$ תמיד אי-שלילית ולכן הסימן של $h(x)$ ייקבע על פי $g'(x)$.

$g'(x)$ חיובית כאשר $g(x)$ עולה ושלילית כאשר $g(x)$ יורדת.

ומשום שתחומי העלייה והירידה של $g(x)$ זהות לאלו של $f(x)$:

$h(x)$ חיובית: $-5 < x < 5$

$h(x)$ שלילית: $5 < x$ או $x < -5$

סעיף ד'(2)

לפי תחומי החיוביות והשליליות של $h(x)$ שמצאנו בסעיף הקודם אנו רואים כיבתחום הנתון $-15 \le x \le 0$ יש צורך להפריד את חישוב השטח לשני אינטגרלים משום שהפונקציה $h(x)$ שלילית עד הנקודה $x = -5$ ולאחר מכן חיובית לכן האינטגרל ייראה כך:

$$\int_{-15}^{-5} [0 - h(x)]dx + \int_{-5}^{0} [h(x) - 0]dx$$

$$= \int_{-15}^{-5} -g(x) \cdot g'(x)dx + \int_{-5}^{0} g(x) \cdot g'(x)dx$$

משום שזהו אינטגרל המכיל את $g(x)$ ואת הנגזרת הפנימית של $g'(x)$ נוכל לפתור אותו כפי שהיינו פותרים עם הצבה של t ו-dt (אינטגרל לפי זיהוי נגזרת פנימית):

$$\int g(x) \cdot g'(x)dx = \frac{(g(x))^2}{2}$$

בעת נוכל להציב בביטוי המתקבל לאחר האינטגרציה את הגבולות של השטחים:

נחשב את ערך הפונקציה $g(x)$ בנקודות שהן גבולות האינטגרל:

$$g(-15) = f(-15) + 0.5 = \frac{-150}{(-20)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$g(-5) = f(-5) + 0.5 = \frac{-50}{(-10)^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$g(0) = f(0) + 0.5 = \frac{1}{2}$$

נחשב את האינטגרל הראשון:

$$\left[-\frac{(g(x))^2}{2}\right]_{-15}^{-5} = \left(-\frac{(0)^2}{2}\right) - \left(-\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{128}\right) = \frac{1}{128}$$

ובעת את השני:

$$\left[\frac{\left(g(x)\right)^2}{2}\right]_{-5}^{0} = \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^2}{2}\right) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

ובסה"כ:

$$S = \frac{1}{128} + \frac{1}{8} = \frac{17}{128}$$

שאלה 7

נתונה פונקציה $f(x) = (1 + \cos x)(-1 + b \cdot \cos x)$

המוגדרת בתחום $-\pi < x < \pi$.

נתון: $0 < b < 1$

סעיף א'

נקבע האם הפונקציה זוגית או אי-זוגית לפי $f(-x)$:

$$f(-x) = (1 + \cos(-x))(-1 + b \cdot \cos(-x))$$

לפי הזהות $\cos(-x) = \cos x$:

$$f(-x) = (1 + \cos x)(-1 + b \cdot \cos x) = f(x)$$

קיבלנו כי $f(-x) = f(x)$ כלומר הפונקציה זוגית.

סעיף ב'

נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x:

$$f(x) = (1 + \cos x)(-1 + b \cdot \cos x) = 0$$

נבדוק מתי כל אחד מהביטויים בפונקציה מתאפס:

$$1 + \cos x = 0$$

$$\cos x = -1$$

פתרון כללי:

$$x = \pi + 2\pi k$$

פתרון בתחום:

$$x = \pm\pi$$

והביטוי השני:

$$-1+b\cdot\cos x=0$$

$$b\cdot\cos x=1$$

$$\cos x=\frac{1}{b}$$

לביטוי זה אין פתרון.

מכיוון ש b הוא שבר אז $\frac{1}{b}$ הוא ביטוי גדול מ-1 ואילו טווח הערכים המתקבלים בפונקציית הקוסינוס הוא $-1\le\cos x\le 1$.

בסה"כ קיבלנו שתי נקודות חיתוך: $(-\pi,0)$, $(\pi,0)$.

<u>סעיף ג'</u>

נתון כי $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$. נמצא את ערך הפרמטר b:

נגזור את הפונקציה לפי נגזרת מכפלה:

$$f(x)=(1+\cos x)(-1+b\cdot\cos x)$$

$$u=(1+\cos x)\qquad;\qquad v=(-1+b\cdot\cos x)$$

$$u'=-\sin x\qquad;\qquad v'=-b\cdot\sin x$$

$$f'(x)=-\sin x\,(-1+b\cdot\cos x)-b\cdot\sin x\,(1+\cos x)$$

נסדר את הנגזרת ונוציא גורם משותף של $-\sin x$:

$$f'(x)=-\sin x\,[-1+b\cdot\cos x+b(1+\cos x)]$$

$$f'(x)=-\sin x\,[2b\cos x-1+b]$$

בעת נשתמש בנתון:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left[2b\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 + b\right] = 0$$

ביטוי זה מתאפס רק כאשר הסוגריים המרובעים מתאפסים:

$$2b\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 + b = 0$$

$$b - 1 + b = 0$$

$$2b = 1$$

$$b = \frac{1}{2}$$

סעיף ד'(1)

נציב את ערך b שמצאנו בפונקציה ובנגזרת:

$$f(x) = (1 + \cos x)\left(-1 + \frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$f'(x) = -\sin x\left[\cos x - \frac{1}{2}\right]$$

נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה:

$$f'(x) = -\sin x\left[\cos x - \frac{1}{2}\right] = 0$$

נפתור את שני הביטויים שיכולים לאפס את הנגזרת:

$$\sin x = 0$$

פתרון כללי:

$$x_1 = 2\pi k$$

$$x_2 = \pi + 2\pi k$$

פתרון בתחום:

$$x = -\pi, 0, \pi$$

נמשיך לביטוי השני:

$$\cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

פתרון כללי:

$$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

פתרון בתחום:

$$x = \pm\frac{\pi}{3}$$

נמצא את ערך הפונקציה בנקודות אלו, נזכור כי הפונקציה זוגית ולכן:

$$f(-\pi) = f(\pi) = (1 + \cos\pi)\left(-1 + \frac{1}{2}\cos\pi\right) = 0$$

$$f(0) = (1 + \cos 0)\left(-1 + \frac{1}{2}\cos 0\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(-1 + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right) = 1.5 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}$$

ובעת נקבע את סוג נקודות הקיצון בעזרת טבלת עליה-ירידה:

מטעמי סימטריה נוכל להתבונן בחלק החיובי של ציר ה- x כדי לקבוע את סוג הקיצון.

x	0	$< x <$	$\frac{\pi}{3}$	$< x <$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right] = - \cdot + < 0$$

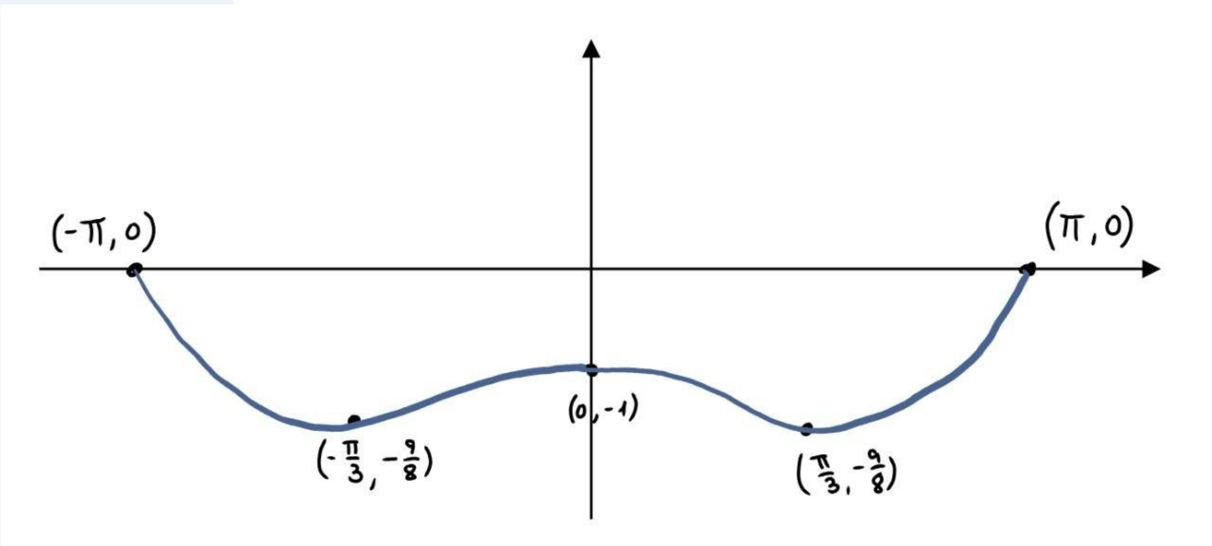
$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right] = - \cdot - > 0$$

נרשום את נקודות הקיצון שמצאנו ואת סוגן:

$(-\pi, 0)\text{max}$ $\quad \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{9}{8}\right)\text{min}$ $\quad (0, -1)\text{max}$ $\quad \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{9}{8}\right)\text{min}$ $\quad (\pi, 0)\text{max}$

<u>סעיף ד'(2)</u>

נסרטט את הפונקציה לפי הנקודות שמצאנו:



סעיף ה':

נתונה הפונקציה $h(x) = f(x) + |f(x)|$ המוגדרת בתחום $-\pi < x < \pi$.

שיעור ה-y של הנקודה A הוא אפס.

נימוק: משום שהפונקציה $f(x)$ אינה לעולם אינה חיובית (היא שלילית או מתאפסת) אז

כאשר נתבונן על $|f(x)|$ נקבל כי כל ערכיה כעת חיוביים או מתאפסים.

לכן, לכל נקודה על $h(x)$ מתקיים המצב הבא:

$$h(x) = f(x) + [-f(x)] = 0$$

שאלה 8

נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4}$.

נתון הישר $y = 3x - 6$.

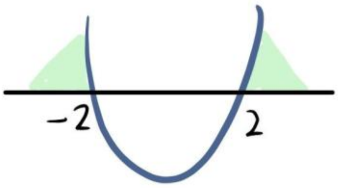
סעיף א'

נמצא את תחום ההגדרה לפי הביטוי בתוך השורש שהוא אי-שלילי, לכן:

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$(x - 2)(x + 2) \geq 0$$

נשים לב כי מדובר בפרבולה ישרה (מחייכת) ולכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא:



$2 \leq x$ או $x \leq -2$

סעיף ב'

נשווה בין הפונקציות כדי למצוא את נקודות החיתוך:

$$3x - 6 = 2\sqrt{x^2 - 4}$$

נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל:

$$(3x - 6)^2 = 4 \cdot (x^2 - 4)$$

$$9x^2 - 36x + 36 = 4x^2 - 16$$

$$5x^2 - 36x + 52 = 0$$

ונקבל שני פתרונות:

$$x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = 5.2$$

שני הפתרונות מתאימים לתחום ההגדרה, נמצא את ערכי ה-y שלהם:

$$y(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

$$y(5.2) = 3 \cdot 5.2 - 6 = 9.6$$

ובסה"כ:

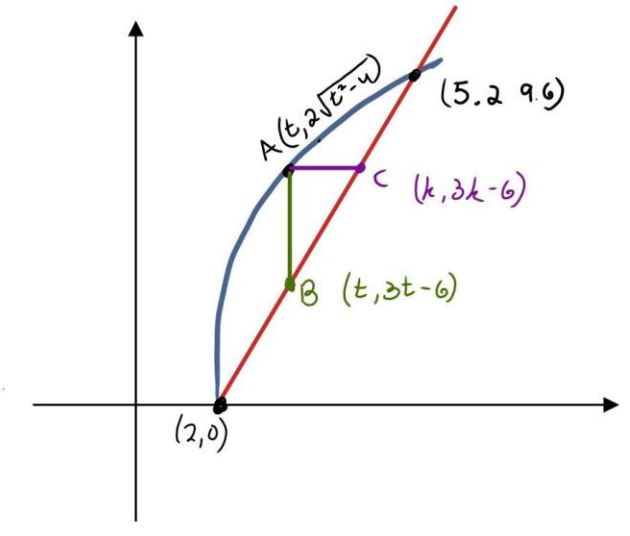
$$(2, 0) \;\; ; \;\; (5.2, 9.6)$$

<u>סעיף ג'(1)</u>

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה

בתחום $2 < x < 5.2$.

נביע את הנקודות B ו-C שעל הישר.



הנקודה B מקיימת $x_A = x_B$ ולכן:

$$B(t, 3t - 6)$$

אורך הקטע AB הוא:

$$AB = y_A - y_B = 2\sqrt{t^2 - 4} - (3t - 6)$$

<u>סעיף ג'(2)</u>

הנקודה C על הישר ולכן נוכל להגדיר אותה:

$$C(k, 3k - 6)$$

הנקודה C מקיימת $y_A = y_C$ ולכן:

$$3k - 6 = 2\sqrt{t^2 - 4}$$

נבודד את k:

$$3k = 2\sqrt{t^2 - 4} + 6$$

$$k = \frac{2}{3}\sqrt{t^2 - 4} + 2$$

ובסה"כ:

$$C\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^2 - 4} + 2, 2\sqrt{t^2 - 4}\right)$$

מכאן נוכל למצוא את אורך AC:

$$AC = x_C - x_A = \frac{2}{3}\sqrt{t^2 - 4} + 2 - t$$

<u>סעיף ד'</u>

נבנה את פונקציית המטרה שלנו:

$$f(x) = AB + AC = 2\sqrt{t^2 - 4} - (3t - 6) + \frac{2}{3}\sqrt{t^2 - 4} + 2 - t$$

$$f(x) = \frac{8}{3}\sqrt{t^2 - 4} - 4t + 8$$

נגזור את הפונקציה כדי למצוא את ערכי הקיצון שלה:

$$f'(x) = \frac{8}{3} \cdot \frac{2t}{2\sqrt{t^2 - 4}} - 4$$

$$f'(x) = \frac{8t}{3\sqrt{t^2 - 4}} - 4$$

נשווה את הנגזרת לאפס:

$$\frac{8t}{3\sqrt{t^2-4}}-4=0$$

$$\frac{8t}{3\sqrt{t^2-4}}=4$$

$$8t=12\sqrt{t^2-4}$$

נעלה את שני האגפים בריבוע:

$$64t^2=144(t^2-4)$$

$$64t^2=144t^2-576$$

$$80t^2=576$$

$$t^2=\frac{576}{80}=\frac{36}{5}$$

נקבל שני פתרונות:

$$t_{1,2}=\pm\frac{6}{\sqrt{5}}\sim\pm 2.683$$

בתחום הנתון התשובה המתאימה היא $t=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

כעת נוודא בעזרת טבלת עליה וירידה כי ערך זה אכן מהווה קיצון מקסימלי:

x	2	$< x <$	$\frac{6}{\sqrt{5}}$	$< x <$	5.2
$f'(x)$	?	$+$	0	$-$	?
$f(x)$	min קצה	↗	max	↘	min קצה

$$f'(2.5) = \frac{8 \cdot 2.5}{3\sqrt{(2.5)^2 - 4}} - 4 = \frac{4}{9} > 0$$

$$f'(3) = \frac{8 \cdot 3}{3\sqrt{(3)^2 - 4}} - 4 \sim 0.422 < 0$$

אכן קיבלנו כי זוהי נקודת מקסימום של פונקציית המטרה.