

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1–5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון הישר $y = x$ ונתונה הפרבולה $y^2 = 2px$.

p הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, והיא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.

א. הביעו באמצעות p את שיעורי הנקודה A .

נסמן ב- ℓ את המשיק לפרבולה בנקודה A .

הנקודה F היא מוקד הפרבולה. מעגל I שמרכזו בנקודה F משיק לישר ℓ בנקודה B .

ב. הביעו באמצעות p את משוואת מעגל I .

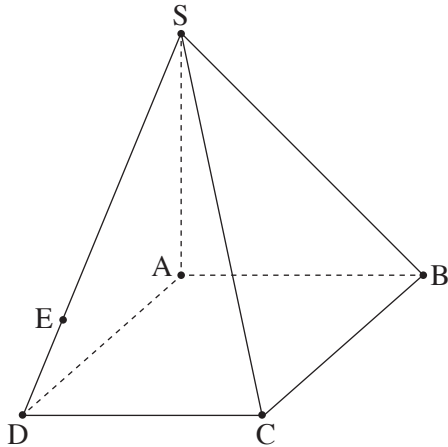
ג. הראו כי הנקודה B נמצאת על ציר ה- y .

נתון: $AB = 6\sqrt{5}$.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים מבפנים למעגל I ואורך הרדיוס שלהם

הוא $3\sqrt{5} - 4$.



2. בסרטוט שלפניכם פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע.

המקצוע AS הוא גובה בפירמידה.

אורך המקצוע AS שווה לאורך צלע הריבוע ABCD.

הנקודה E נמצאת על המקצוע SD כך ש- $SE = \frac{3}{4} \cdot SD$.

הנקודה N מקיימת: $\vec{SN} = k \cdot \vec{SC}$. k הוא פרמטר.

נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{u}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את הווקטור $\vec{EN}$.

נתון: $|\vec{EN}| = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot |\underline{w}|$.

ב. מצאו את הערך של k.

הציבו $k = \frac{1}{2}$, וענו על הסעיפים ג-ד.

ממקמים את הפירמידה במערכת צירים כך ש- $A(0, 0, 0)$, $B(0, 20, 0)$.

הקודקוד D נמצא על החלק החיובי של ציר ה- x, והקודקוד S נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודות N ו- E.

(2) מצאו את משוואת המישור ENB.

ד. האם נפח הפירמידה SENB גדול מנפח הפירמידה CENB, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את תשובתכם.

3. נתונים שלושה מספרים מרוכבים:

$$w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}, \quad z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^\circ) + i \cdot \sin(\alpha + 90^\circ)), \quad z_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ, \quad r > 0$$

הנקודה A מייצגת את המספר w במישור גאוס. נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא -1.

א. מצאו את הערך של α .

נתון כי הנקודה A נמצאת על הישר $y = -1$.

ב. מצאו את הערך של r.

$$z^4 = 128 \cdot (z_1 \cdot w)^2$$

z הוא משתנה מרוכב.

ג. מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

כל אחת מן הנקודות B ו- C מייצגת פתרון אחד מבין הפתרונות שמצאתם בסעיף ג.

הנקודה B נמצאת ברביע הראשון והנקודה C נמצאת ברביע השני.

המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z| = b$ חותך את החלק החיובי של ציר ה- y

בנקודה K.

b הוא מספר ממשי חיובי.

נתון כי שטח המרובע CKBO הוא $13\sqrt{2}$.

ד. מצאו את הערך של b.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{9}{e^x - 9} + a$. הוא פרמטר. a

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

ב. הוכיחו כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

נתון כי הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את שני הערכים האפשריים של a .

הציבו $a = 2$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. הראו כי $f(x) = \frac{2e^{2x} - 10e^x}{e^{2x} - 10e^x + 9}$.

ה. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \ln 3$.

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = 6 \cdot \ln(x^2 + 5) - 2x$, המוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי הפונקצייה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \ln(f(x) - 10)$, המוגדרת בתחום שבו $f(x) > 10$.

ד. (1) כמה אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

בהצלחה!