

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

קיץ תשפ"ו 2026, מועד ב', שאלון 35571 (גרסה ב')

נכתב על-ידי רגב אס

שאלה 1 – שאלות קצרות

סעיף א'(1) - אינדוקציה

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{b}$$

נתון כי השוויון מתקיים עבור $n = 2$:

$$1^3 + 2^3 = \frac{2^2(2+1)^2}{b}$$

$$9 = \frac{4 \cdot 9}{b}$$

$$b = 4$$

סעיף א'(2) - אינדוקציה

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

נוכיח נכונות הטענה עבור $n = 1$:

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$1 = \frac{4}{4}$$

הטענה נכונה עבור $n = 1$.

נניח נכונות הטענה עבור $n = k$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

נוכיח נכונות הטענה עבור $n = k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

נוציא גורם משותף באגף השמאלי ונסדר בהתאם את האגף הימני:

$$(k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + (k+1) \right] = (k+1)^2 \cdot \frac{(k+2)^2}{4}$$

$$(k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right] = (k+1)^2 \cdot \frac{(k+2)^2}{4}$$

$$(k+1)^2 \left[\frac{(k+2)^2}{4} \right] = (k+1)^2 \cdot \frac{(k+2)^2}{4}$$

הטענה מתקיימת עבור $n = k + 1$.

הוכחנו נכונות הטענה עבור $n = 1$ ואת נכונות הטענה עבור $n = k + 1$ על סמך הנחת האינדוקציה. מכאן שהטענה נכונה לכל n טבעי.

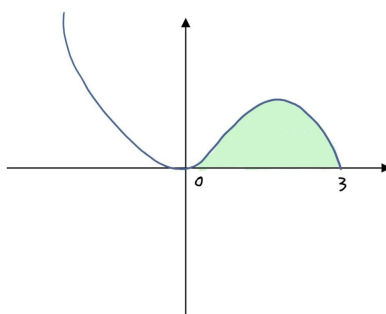
סעיף ב'(1) – חדו"א

נשים לב כי תחום ההגדרה הוא $x \leq 3$ לכן נוכל לפסול מיד את הביטויים III ו-IV. בכל ארבעת המקרים הנתונים הפונקציה מתאפסת בנקודות $x = 0, 3$. מהסרטוט אנו יודעים כי $f(1) < 0$, לכן דרך טובה לקבוע מי הביטוי המתאים הוא להציב בשני הביטויים הנותרים $x = 1$ ולבדוק מי מהם מחזיר ערך שלילי. במקרה הזה זהו הביטוי II.

סעיף ב'(2) – חדו"א

נתונה פונקציה חדשה $g(x) = (f(x))^2$ המוגדרת באותו התחום. נרשום את הפונקציה בצורה מפורשת:

$$g(x) = x^2(3 - x)$$



גבולות השטח המוגבל הם $x = 0, 3$ והאינטגרל המתאים לשטח:

$$\int_0^3 (x^2(3 - x)) dx$$

נסדר אותו:

$$\int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3$$

וכעת נציב את הגבולות:

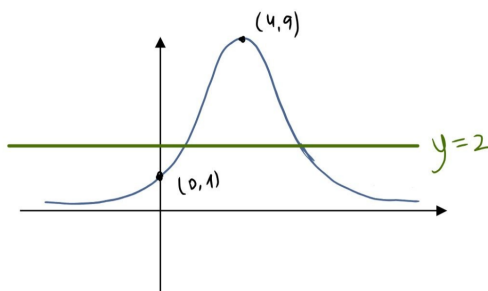
$$\left(3^3 - \frac{3^4}{4} \right) - \left(0^3 - \frac{0^4}{4} \right) = 27 - \frac{81}{4}$$

$$S = \frac{27}{4}$$

סעיף ג' (1) – חדו"א

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)-2}$

האסימפטוטות המאונכות לציר ה-x מתקבלות כאשר המכנה מתאפס, כלומר כאשר $f(x) = 2$.
נסתכל על הישר $y = 2$.



ישר זה חותך את הפונקציה בשתי נקודות. מכאן שלפונקציה $g(x)$ יש **שתי אסימפטוטות אנכיות**.

סעיף ג' (2) – חדו"א

מהסרטוט: לגרף הפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אופקית ב- $y = 0$.
זאת אומרת שבפלוס ובמינוס אינסוף נוכל לומר כי הפונקציה $f(x)$ שואפת לאפס.

עבור $g(x)$ נקבל:

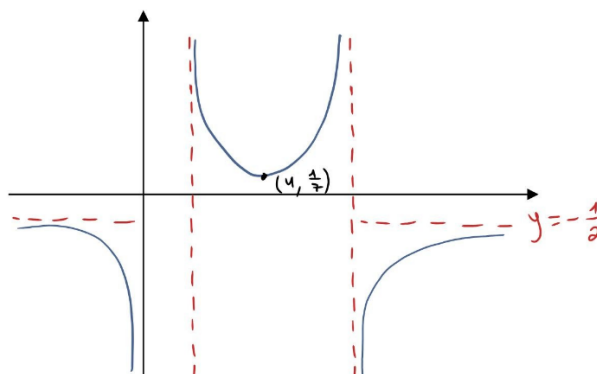
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

והאסימפטוטה האופקית תהיה:

$$y = -\frac{1}{2}$$

סעיף ג' (3) – חדו"א

נסרטט את הפונקציה $g(x)$, נשים לב שקודם עלינו לבצע הזזה אנכית כלפי מטה, כך שלפונקציה $f(x) - 2$ יש תחומי שליליות. משום שתחומי העלייה והירידה מתהפכים בטרנספורמציה של $\frac{1}{f(x)}$:



סעיף ד' (1) – סדרות

נתון כי צלעות המשולש יוצרות סדרה הנדסית וכי $AB = 1$ הוא האיבר הראשון.
מכיוון וזהו משולש ישר זווית אנו יודעים כי BC היא הצלע הגדולה במשולש, לכן לא יכול להיות
כי היא תהיה האיבר השני בסדרה.

סעיף ד' (2) – סדרות

הסדרה שלנו AB, AC, BC היא למעשה הסדרה $1, q, q^2$.

נשתמש במשפט פיתגורס כדי למצוא את איברי הסדרה:

$$1^2 + q^2 = (q^2)^2$$

זוהי משוואה דו-ריבועית שנוכל לפתור על-ידי הצבה של $t = q^2$:

$$1 + t = t^2$$

$$0 = t^2 - t + 1$$

נפתור בעזרת נוסחת השורשים ונקבל:

$$q^2 = t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

הפתרון השלילי נפסל משום אורך הצלע חייב להיות חיובי ובסה"כ נקבל:

$$q^2 = BC = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

שאלה 2

סעיף א'

משום שכל איברי הסדרה חיוביים נוכל לדעת כי מנת הסדרה חיובית $q > 0$.
ומכיוון והסדרה יורדת אז מנת הסדרה חייבת להיות שבר.
ובסה"כ $0 < q < 1$. **טענה II נכונה.**

סעיף ב'

נתונה הסדרה האינסופית שאיבריה מקיימים: $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$.
נוכל לרשום זאת כך:

$$b_n = a_n + a_n q + a_n q^2 = a_n(1 + q + q^2)$$

כדי להוכיח שזו סדרה הנדסית נראה כי מנת שני איברים כלליים סמוכים אינה תלויה ב- n :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}(1 + q + q^2)}{a_n(1 + q + q^2)} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

היחס קבוע ואינו תלוי ב- n , ולכן b_n היא **סדרה הנדסית שמנתה q** .

סעיף ג'

נתון: $S_b = 1.56 S_a$.

שתי הסדרות הנדסיות אין-סופיות עם אותה מנה $0 < q < 1$, ולכן נשתמש בסכום סדרה
הנדסית אינסופית מתכנסת $S = \frac{a_1}{1-q}$:

$$S_a = \frac{a_1}{1-q}, \quad S_b = \frac{b_1}{1-q} = \frac{a_1(1 + q + q^2)}{1-q}$$

נתבונן ביחס $\frac{S_b}{S_a}$:

$$\frac{S_b}{S_a} = \frac{\frac{a_1(1 + q + q^2)}{1-q}}{\frac{a_1}{1-q}}$$

נצמצם את הביטויים ונקבל:

$$\frac{S_b}{S_a} = 1 + q + q^2 = 1.56$$

$$q^2 + q - 0.56 = 0$$

בעזרת נוסחת השורשים נקבל:

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2.24}}{2} = \frac{-1 \pm 1.8}{2}$$

הפתרונות הם $q = 0.4$ ו- $q = -1.4$. מכיוון ש- $0 < q < 1$ נפסל הפתרון השלילי:

$$q = 0.4$$

סעיף ד'(1)

נתון: $c_n = \frac{b_n}{6a_n}$

נציב $b_n = a_n(1 + q + q^2)$:

$$c_n = \frac{a_n(1 + q + q^2)}{6a_n} = \frac{1 + q + q^2}{6}$$

ראינו כבר כי:

$$1 + q + q^2 = 1.56$$

ולכן:

$$c_n = \frac{1.56}{6} = 0.26$$

הביטוי אינו תלוי ב- n , ולכן c_n קבועה.

סעיף ד'(2)

נתון: $S_{c_k} = 18.46$. משום שזוהי סדרה קבועה הסכום מתקבל על ידי מכפלת איבר בודד ב- k :

$$0.26k = 18.46$$

$$k = 71$$

סעיף ה'

לאחר החלפת הסימן במקומות הזוגיים מתקבלת סדרה מחליפת סימן:

$$0.26, -0.26, 0.26, -0.26, \dots$$

כעת כל סכום כל זוג איברים סמוכים הוא אפס.

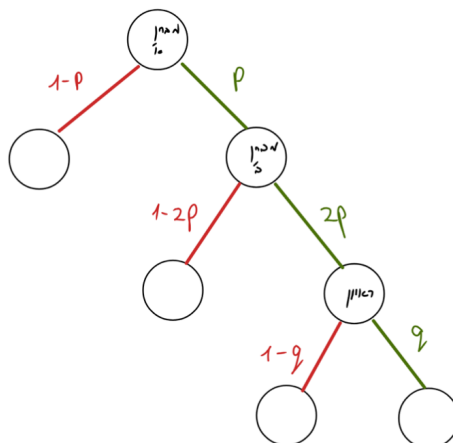
עבור $k = 71$ נוכל לומר כי יש 35 זוגות של איברים שסכומם הוא אפס ועוד איבר נוסף (במקום אי-זוגי) שערכו 0.26. לכן זהו גם סכום הסדרה החדש.

$$S = 0.26$$

שאלה 3

סעיף א'

נבנה את העץ המתאר את השאלה. נשים לב כי זהו עץ לא סימטרי ורק מי שעובר בהצלחה את המבחנים עובר לשלב הבא:



נתון כי ההסתברות להתקבל לעבודה (לעבור את מבחן א', לעבור את מבחן ב', ראיון בהצלחה) גדולה פי 3 מההסתברות לעבור את שני המבחנים ולא להצליח בראיון:

$$q = 3(1 - q)$$

$$q = 3 - 3q$$

$$4q = 3$$

$$q = \frac{3}{4}$$

סעיף ב'

מהנתון ולפי מאורע משלים:

$$P(\text{מתקבלים}) = 1 - P(\text{לא מתקבלים}) = 0.06$$

לפי המסלול היחיד להתקבל:

$$0.06 = p \cdot 2p \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}p^2$$

$$0.04 = p^2$$

$$p = 0.2$$

סעיף ג'

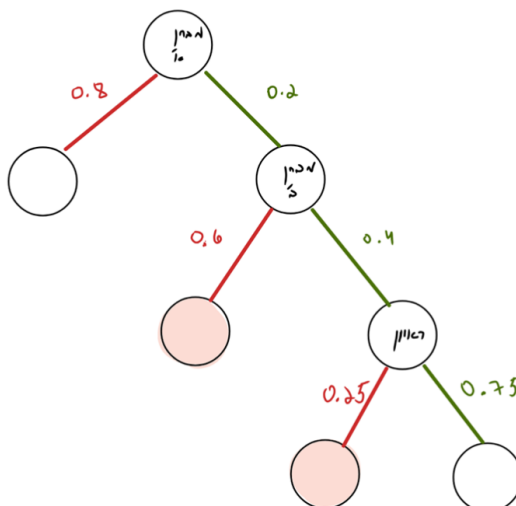
נשתמש בנוסחה לחישוב הסתברות מותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נרשום בצורה מפורשת את הביטוי המבוקש:

$$P(\text{לא התקבל ועבר מבחן א}) = \frac{P(\text{לא התקבל} \cap \text{עבר מבחן א})}{P(\text{לא התקבל})}$$

נסתכל על העץ עם ההסתברויות המלאות, ונסכום את ההסתברויות המתארות את המצב המבוקש במונה.



אנו כבר יודעים כי ערך המכנה הוא 0.94 מהנתון הקודם:

$$P(\text{לא התקבל ועבר מבחן א}) = 0.2 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.25 = 0.14$$

ובסה"כ נקבל:

$$P(\text{לא התקבל} / \text{עבר מבחן א}) = \frac{0.14}{0.94} = \frac{7}{47}$$

סעיף ד'

נוכל לחשב את ההסתברות בעזרת נוסחת ברנולי:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot P^k \cdot (1 - P)^{n-k}$$

במקרה שלנו $n = 5$, $k = 2, 3, 4, 5$. וערך ההסתברות p המתאים לתהליך הוא הערך מסעיף ג'.
משום שיש לנו מספר גדול של ערכי k המתאימים לתיאור שבשאלה, נעדיף להסתכל על
המאורע המשלים כאשר $k = 0, 1$:

$$P(\text{לפחות שניים}) = 1 - [P_5(0) + P_5(1)]$$

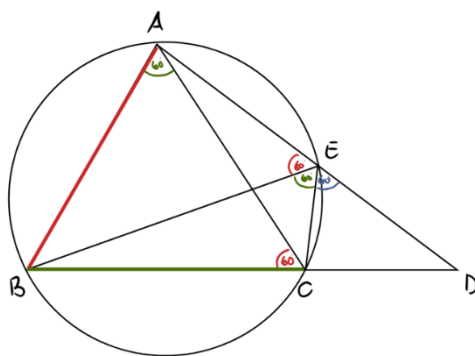
$$P_5(0) = \binom{5}{0} \left(\frac{7}{47}\right)^0 \left(\frac{40}{47}\right)^5 \approx 0.446$$

$$P_5(1) = \binom{5}{1} \left(\frac{7}{47}\right)^1 \left(\frac{40}{47}\right)^4 \approx 0.391$$

ובסה"כ:

$$P(\text{לפחות שניים}) = 1 - [0.446 + 0.391]$$

$$P(\text{לפחות שניים}) \approx 0.163$$



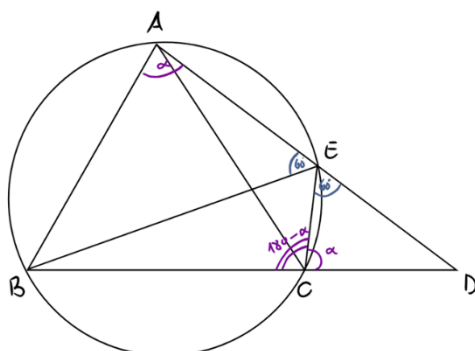
שאלה 4

נתון משולש שווה צלעות.

סעיף א'

הוכיחו: $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$.

טענה	נימוק
$\angle ACB = \angle BAC = 60^\circ$	זוויות במשולש שווה-צלעות
$\angle AEB = \angle ACB = 60^\circ$	זוויות היקפיות הנשענות על הקשת AB
$\angle BEC = \angle BAC = 60^\circ$	זוויות היקפיות הנשענות על הקשת BC
$\angle AEC + \angle CED = 180^\circ$	זוויות צמודות סכומן 180°
$\angle AEC = \angle AEB + \angle BEC = 120^\circ$	חיבור זוויות
$\angle CED = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$	חישוב



סעיף ב'

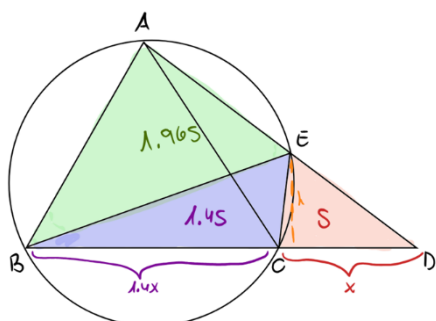
הוכיחו: $\triangle AEB \sim \triangle CED$.

טענה	נימוק
$\angle AEB = \angle CED = 60^\circ$	הוכחנו בסעיף א' (זוויות)
$\angle BAE + \angle BCE = 180^\circ$	זוויות נגדיות במרובע AECB החסום במעגל
$\angle ECD + \angle BCE = 180^\circ$	זוויות צמודות
$\angle BAE = \angle ECD$	כלל המעבר (זוויות)
$\triangle AEB \sim \triangle CED$	דמיון לפי זווית-זווית

סעיף ג'

הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$

טענה	נימוק
$\triangle AEB \sim \triangle CED$	הוכחנו בסעיף ב'
$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD} = \frac{EB}{ED}$	יחס הצלעות בין משולשים דומים
$AB = BC$	צלעות במשולש שווה-צלעות
$\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$	הצבה



סעיף ד'

נתון: $S_{AEB} = 1.96 S_{CED}$

מצאו פי כמה גדול שטח המשולש ABD משטח המשולש CED.

טענה	נימוק
$\frac{S_{AEB}}{S_{CED}} = 1.96 = \left(\frac{BC}{CD}\right)^2$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה ליחס הדמיון בריבוע
$\frac{BC}{CD} = 1.4$	חישוב
$\frac{S_{CEB}}{S_{CED}} = \frac{\frac{h \cdot BC}{2}}{\frac{h \cdot CD}{2}} = \frac{BC}{CD} = 1.4$	יחסי שטחים בעלי גובה משותף
$S_{ABD} = S_{ABE} + S_{CED} + S_{CEB}$	חיבור שטחים
$S_{ABD} = 1.96S_{CED} + S_{CED} + 1.4S_{CED}$	הצבה
$S_{ABD} = 4.36S_{CED}$	חישוב

שאלה 5

סעיף א'

נתון: המשולש שווה-שוקיים, ולכן זוויות הבסיס שוות: $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$.

נתון גם: $ED \perp AC$, $EM \perp AB$, $BE = 3EC = 3k$.

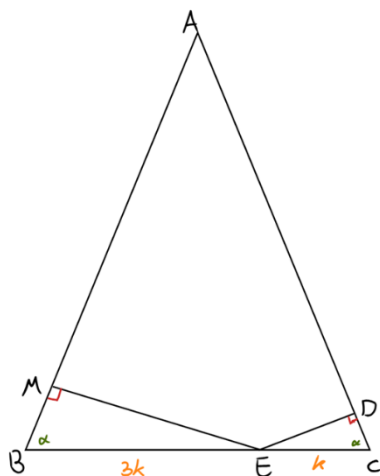
עלינו להביע באמצעות α, k את הקטעים DE ו- ME .

נעבוד במשולש ישר הזווית DEC :

$$DE = EC \cdot \sin \alpha$$

$$DE = k \cdot \sin \alpha$$

כעת נעבוד במשולש ישר הזווית MEB :



$$ME = BE \cdot \sin \alpha$$

$$ME = 3k \cdot \sin \alpha$$

סעיף ב'

$$S_{CED} + S_{BEM} = 1.6k^2 \quad \text{נתון:}$$

נמצא את הערך של α .

$$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DC = \frac{1}{2}k^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$S_{BEM} = \frac{1}{2} \cdot ME \cdot MB = \frac{9}{2}k^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$S_{CED} + S_{BEM} = \frac{1}{2}k^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{9}{2}k^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$S_{CED} + S_{BEM} = 5k^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$5k^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1.6k^2$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{8}{25}$$

נשתמש בזהות הכפולה של פונקציית הסינוס:

$$2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin (2\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{16}{25}$$

נסתכל על הפתרונות הכלליים:

$$2\alpha_1 = 39.79^\circ + 360^\circ k$$

$$2\alpha_2 = (180^\circ - 39.79^\circ) + 360^\circ k$$

נסדר אותם:

$$\alpha_1 = 19.86^\circ + 180^\circ k$$

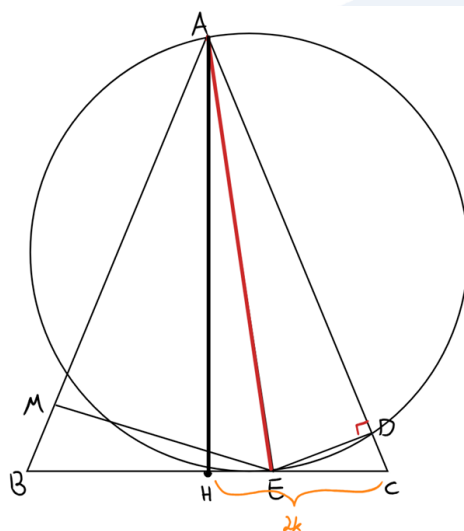
$$\alpha_2 = 70.10^\circ + 180^\circ k$$

ולפי התחום הנתון $30^\circ < \alpha < 90^\circ$ הפתרון היחיד המתקבל הוא:

$$\alpha = 70.10^\circ$$

סעיף ג'

נתון כי אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED הוא 32 .
מכיוון והזווית $\angle ADE$ היא זווית ישרה אנו יודעים כי AE הוא הקוטר במעגל ואורכו 64.
נוריד גובה במשולש שווה השוקיים ABC אל הנקודה שנקרא לה H הבסיס של המשולש באורך של $4k$, זה אומר שנוכל לעבוד בקלות עם חצי הבסיס (הגובה הוא גם תיכון).



במשולש AHC:

$$\cos \alpha = \frac{2k}{AC}$$

$$AC = \frac{2k}{\cos \alpha}$$

כעת נבטא את הקטע AE באמצעות k בעזרת משפט הקוסינוסים במשולש AEC:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2 \cdot AC \cdot CE \cdot \cos \alpha$$

$$AE^2 = \frac{4k^2}{\cos^2 \alpha} + k^2 - 4k^2$$

$$AE^2 = k^2 \left(\frac{4}{\cos^2 \alpha} - 3 \right)$$

נציב $\alpha \approx 70.1^\circ$ $AE = 64$:

$$64^2 = k^2 \left(\frac{4}{0.1155} - 3 \right) \approx 31.6k^2$$

$$k^2 = \frac{64^2}{31.6} \approx 129.6$$

$$k \approx 11.396$$

שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{9(x-1)^2}{x^2+a}$. פרמטר חיובי. a

סעיף א'(1)

המכנה חיובי תמיד, לכן תחום ההגדרה הוא **כל x** .

סעיף א'(2)

אין אסימפטוטות אנכיות משום שאין נקודות שאינן מוגדרות בפונקציה.

מכיוון והמונה והמכנה שניהם ממעלה שנייה אז האסימפטוטה האופקית תתקבל ב- **$y = 9$** לפי חלוקת המקדמים.

סעיף ב'

נגזור לפי כלל המנה ונפשט:

$$u = 9(x-1)^2 \quad ; \quad v = x^2 + a$$

$$u' = 18(x-1) \quad ; \quad v' = 2x$$

$$f'(x) = \frac{18(x-1)(x^2+a) - 18x(x-1)^2}{(x^2+a)^2}$$

נסדר את הנגזרת עם גורם משותף:

$$f'(x) = \frac{18(x-1)[x^2+a-x(x-1)]}{(x^2+a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{18(x-1)[x+a]}{(x^2+a)^2}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר המונה שלה מתאפס:

$$18(x-1)[x+a] = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -a$$

נציב בפונקציה כדי למצוא את ערך הפונקציה בנקודות אלו:

$$f(1) = \frac{9 \cdot 0}{1+a} = 0$$

$$f(-a) = \frac{9 \cdot (a+1)^2}{a^2+a}$$

$$f(-a) = \frac{9 \cdot (a+1)^2}{a(a+1)} = \frac{9(a+1)}{a}$$

נקבע את סוג נקודות הקיצון בעזרת טבלת עליה-ירידה:

x	x <	-a	< x <	1	< x
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)		max		min	

נשים לב שסביב נקודת הקיצון $x = -a$ עלינו להציב בנגזרת מכפלות של הביטוי:

$$f'(-2a) = \frac{18(-2a-1)[-2a+a]}{(x^2+a)^2} = \frac{\text{חיובי}}{\text{חיובי}} > 0$$

$$f'(0) = \frac{18(0-1)[0+a]}{(x^2+a)^2} = \frac{\text{שלילי}}{\text{חיובי}} < 0$$

$$f'(2) = \frac{18(2-1)[2+a]}{(x^2+a)^2} = -\frac{\text{חיובי}}{\text{חיובי}} > 0$$

בסה"כ קיבלנו:

$$\left(-a, \frac{9(a+1)}{a}\right)_{\max}$$

$$(1, 0)_{\min}$$

סעיף ג'

נתון: שיעור ה-y של נקודת המקסימום הוא 10.5.

נשווה את הערך שהבענו באמצעות a ונמצא אותו:

$$\frac{9(a+1)}{a} = 10.5$$

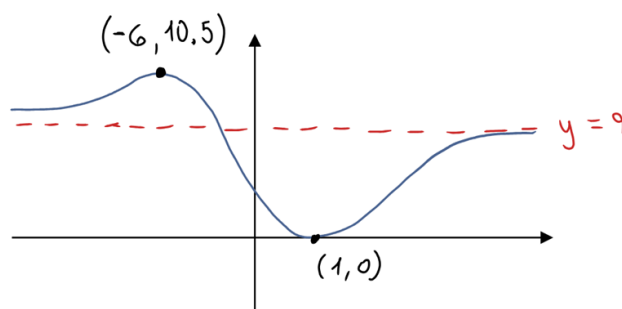
$$9a + 9 = 10.5a$$

$$1.5a = 9$$

$$a = 6$$

סעיף ד'

נסרטט את הפונקציה:



סעיף ה'(1)

מגדירים פונקציה חדשה $g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

הפונקציה אינה מוגדרת אך ורק כאשר המכנה מתאפס, כלומר כאשר $f(x) = 0$. נקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ היא $(1, 0)$ לכן נוכל לומר כי $x \neq 1$.

סעיף ה'(2)

נשים לב כי המכנה של $g(x)$ חיובי תמיד. לכן הסימן של $g(x)$ נקבע לפי סימן הנגזרת $f'(x)$ ומשום שיש לו מקדם שלילי, התחומים יהיו הפוכים.

$g(x)$ חיובית בתחום $-6 < x < 1$ ושלילית בתחומים $a < -6$ או $1 < a$.

סעיף ה'(3)

בתחום המבוקש הפונקציה חיובית. לכן נבצע אינטגרל ללא שינוי:

$$\int_{-6}^0 g(x) dx = \int_{-6}^0 -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} dx$$

נוכל לפתור לפי נגזרת פנימית ונקבל:

$$\left[\frac{1}{f(x)} \right]_{-6}^0 = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(-6)}$$

נציב ונחשב:

$$s = \left(\frac{0^2 + 6}{9(0 - 1)^2} \right) - \left(\frac{(-6)^2 + 6}{9(-6 - 1)^2} \right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{21} = \frac{4}{7}$$

שאלה 7

נתונה פונקציה $f(x) = (\sin x)^2 \cdot \cos(2x)$
המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

סעיף א'

נראה כי הפונקציה זוגית ומקיימת $f(-x) = f(x)$:

$$f(-x) = (\sin(-x))^2 \cdot \cos(-2x)$$

לפי הזהויות $\sin(-x) = -\sin x$ ו- $\cos(-x) = \cos x$:

$$= (-\sin(x))^2 \cdot \cos(2x) = (\sin x)^2 \cdot \cos(2x) = f(x)$$

קיבלנו כי $f(-x) = f(x)$ כלומר הפונקציה זוגית.

סעיף ב'

נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ראשית נגזור:

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos(2x) + (\sin x)^2 \cdot (-2 \sin(2x))$$

נוציא גורם משותף $2 \sin x$:

$$f'(x) = 2 \sin x [\cos x \cdot \cos(2x) - \sin x \cdot \sin(2x)]$$

נשתמש בזהות $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$:

$$f'(x) = 2 \sin x [\cos(3x)]$$

נשווה לאפס ונקבל את הפתרונות הכלליים הבאים:

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k$$

פתרון בתחום:

$$x = 0$$

נמשיך לביטוי השני:

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$$

פתרונות בתחום:

$$x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6}$$

נמצא את ערך הפונקציה בנקודות אלו, נזכור כי הפונקציה זוגית ולכן:

$$f(0) = (\sin 0)^2 \cdot \cos(0) = 0$$

$$f\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}$$

נבדוק גם את נקודות הקצה:

$$f\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

וכעת נקבע את סוג נקודות הקיצון בעזרת טבלת עליה-ירידה:
מטעמי סימטריה נוכל להתבונן בחלק החיובי של ציר ה- x כדי לקבוע את סוג הקיצון.

x	0	$< x <$	$\frac{\pi}{6}$	$< x <$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	0	+	0	-	?
$f(x)$	min		max		min

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] > 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \left[\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right] < 0$$

נרשום את נקודות הקיצון שמצאנו ואת סוגן:

$$\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{ min}$$

$$\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{1}{8}\right) \text{ max}$$

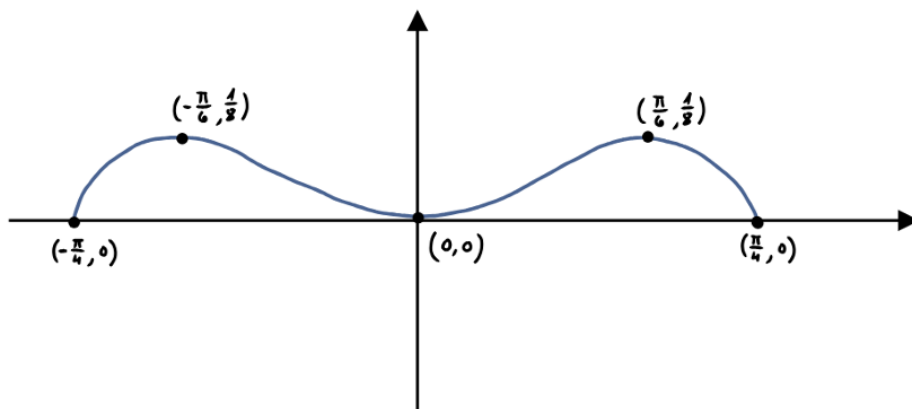
$$(0, 0) \text{ min}$$

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{8}\right) \text{ max}$$

$$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{ min}$$

סעיף ג'

נסרטט את הפונקציה לפי הנקודות שמצאנו:



סעיף ד'(1):

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$. a פרמטר שלילי.

נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה:

אסור לביטוי בתוך השורש להיות שלילי.

מכיוון והפרמטר a שלילי אז נדרוש שגם $f'(x)$ תהיה שלילית.

לפי הסרטוט, כאשר $f(x)$ יורדת (או מתאפסת) הפונקציה $g(x)$ מוגדרת:

$$-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0 \quad \text{או} \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

סעיף ד'(2):

נקודות החיתוך של $g(x)$ עם הצירים מתקבלות כאשר הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת.

$$x = \pm \frac{\pi}{6}, \quad x = 0$$

והנקודות:

$$\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right), \quad (0, 0), \quad \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$$

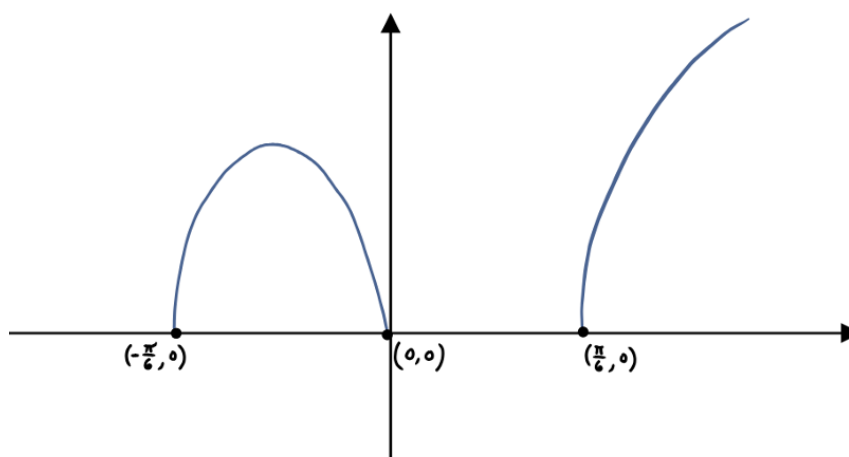
סעיף ה':

נסתכל על הנגזרת של $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{f''(x)}{2\sqrt{a \cdot f'(x)}}$$

אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f''(x) = 0$, זאת אומרת ש- $g'(x)$ מתאפסת פעם אחת בתחום ולפונקציה $g(x)$ יש קיצון אחת בלבד.

נסרטט את הפונקציה לפי נקודות החיתוך עם ציר ה- x , לפי זה שהפונקציה חיובית תמיד:



שאלה 8

נתונה הפונקציה $f(x) = (4x - 2)^3$.

נתון הישר $y = 3x + b$.

סעיף א'

הנקודה A על הפונקציה $f(x)$:

$$A(t, (4t - 2)^3)$$

B על הישר $y = 3x + b$:

$$B(k, 3k + b)$$

מכיון ש $y_A = y_B$:

$$3k + b = (4t - 2)^3$$

$$k = \frac{(4t - 2)^3 - b}{3}$$

סעיף ב' (1)

נסתכל על הקטע AB (שהוא מקביל לציר ה-x):

$$AB(t) = x_A - x_B = t - \frac{(4t - 2)^3 - b}{3}$$

$$AB(t) = \frac{3t - (4t - 2)^3 + b}{3}$$

נגזור ונשווה את הנגזרת לאפס כדי למצוא את נקודת הקיצון:

$$AB'(t) = \frac{3 - 3(4t - 2)^2 \cdot 4}{3} = 1 - 4(4t - 2)^2 = 0$$

$$4(4t - 2)^2 = 1$$

$$(4t - 2)^2 = \frac{1}{4}$$

נוציא שורש ונקבל שני פתרונות אפשריים:

$$4t - 2 = \pm \frac{1}{2}$$

$$t_1 = \frac{5}{8} ; t_2 = \frac{3}{8}$$

נקבע את סוג נקודת הקיצון לפי הנגזרת השנייה:

$$AB'(t) = 1 - 4(4t - 2)^2$$

$$AB''(t) = -2 \cdot 4 \cdot 4(4t - 2) = -32(4t - 2)$$

$$AB''\left(\frac{3}{8}\right) = -32\left(4 \cdot \frac{3}{8} - 2\right) > 0 \rightarrow \min$$

$$AB''\left(\frac{5}{8}\right) = -32\left(4 \cdot \frac{5}{8} - 2\right) < 0 \rightarrow \max$$

ובסה"כ נוכל לומר כי הערך המינימלי מתקבל כאשר:

$$t = \frac{3}{8}$$

סעיף ב' (2)

נבדוק את נקודות הקצה וגם את הקיצון הפנימית מסוג מקסימום שמצאנו:

$$AB\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{3 \cdot \frac{5}{8} - (4 \cdot \frac{5}{8} - 2)^3 + b}{3} = \frac{\frac{7}{4} + b}{3}$$

$$AB(0.7) = \frac{3 \cdot 0.7 - (4 \cdot 0.7 - 2)^3 + b}{3} = \frac{1.588 + b}{3}$$

$$AB(0) = \frac{3 \cdot 0 - (4 \cdot 0 - 2)^3 + b}{3} = \frac{8 + b}{3}$$

הערך המקסימלי של AB מתקבל כאשר $x = 0$.