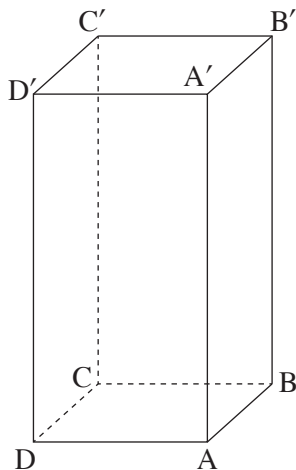


השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, על שאלה אחת לפחות מכל פרק (לכל שאלה – $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2 = 27x$.
 בנקודה A, שנמצאת על הפרבולה, מעבירים משיק לפרבולה ששיפועו $\frac{3}{4}$.
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.
 הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו בנקודה M.
 נתון כי המשיק לפרבולה הוא גם משיק למעגל בנקודה A,
 וכי ציר ה־y משיק למעגל כך ששיעור ה־x של הנקודה M קטן משיעור ה־x של הנקודה A.
ב. (1) מצאו את משוואת הישר AM.
 (2) מצאו את משוואת המעגל.
 נקודה B היא נקודה כלשהי על המעגל. דרך נקודה B מעבירים משיק למעגל.
 נקודה P נמצאת על המשיק כך ש־ $BP = 18$.
ג. (1) מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה.
 (2) האם על המקום הגאומטרי שמצאתם יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא 40? נמקו את תשובתכם.



2. בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A' B' C' D'$.

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{u}$.

הנקודה E היא אמצע המקצוע BB' .

א. הביעו את \vec{EA} ו- \vec{EC} באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} .

הנקודה M מקיימת $\vec{BM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}$.

ב. הביעו את \vec{EM} באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} .

נתון: $\vec{EM} = a \cdot \vec{EA} + b \cdot \vec{EC}$.

a ו- b הם פרמטרים.

ג. (1) מצאו את הערך של a ואת הערך של b.

(2) האם הנקודה M נמצאת במישור AEC? נמקו את תשובתכם.

נתון כי $|\underline{w}| = 8$ והוקטור \vec{BM} מאונך למישור AEC.

ד. מצאו את הערך של $|\underline{u}|$ ואת הערך של $|\underline{v}|$.

ה. חשבו את המרחק בין הנקודה B ובין המישור AEC.

3. נתונה המשוואה $z^3 = -216$.

z הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את כל פתרונות המשוואה.

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$w_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \quad w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha)$$

$$50^\circ < \alpha < 130^\circ$$

שתי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים w_1 ו- w_2 נמצאות על ישר אחד, שעובר דרך ראשית הצירים O במישור גאוס.

ב. מצאו את שני הערכים האפשריים של α .

נתון כי w_1 הוא אחד מן הפתרונות שמצאתם בסעיף א.

ג. מצאו את הערך של α ואת הערך של r.

נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים: $w_3 = 6 \cdot i$, $w_4 = \frac{12}{i}$.

ABCD הוא מרובע קמור. הקודקוד A מיוצג על ידי המספר w_1 , הקודקוד B מיוצג על ידי המספר w_3 ,

הקודקוד C מיוצג על ידי המספר w_2 , והקודקוד D מיוצג על ידי המספר w_4 .

ד. הראו כי שטח המרובע ABCD הוא 81.

u הוא מספר מרוכב. הנקודה E, שמיוצגת על ידי המספר u, נמצאת ברביע הראשון על חוצה הזווית BOA.

נתון כי $\bar{u} + \frac{1}{u} = 10.1 \cdot (\cos 285^\circ + i \cdot \sin 285^\circ)$, $|u| > 1$.

ה. מצאו את המספר המרוכב u.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (4 - \ln x)$, המוגדרת בתחום $x > 0$.
n הוא פרמטר טבעי.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ב. מצאו את הערך של n.
נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא 3.

ג. הצילו $n = 1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ו.

א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

ב. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר, $1 < a < 4$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e$ ו- $x = e^a$ הוא $\ln 12$.
א. מצאו את הערך של a.

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = 5e^x - x + 16 \cdot \ln(5 - e^x)$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ג. הראו כי $f'(x) = \frac{-5(e^x - 1)^2}{5 - e^x}$.

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ המקביל לציר ה- x .

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x < \ln 5$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) + ax$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
a הוא פרמטר.

א. היעזרו בגרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ומצאו בעבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $g(x)$ שתי נקודות קיצון.
נמקו את תשובתכם.

בהצלחה!