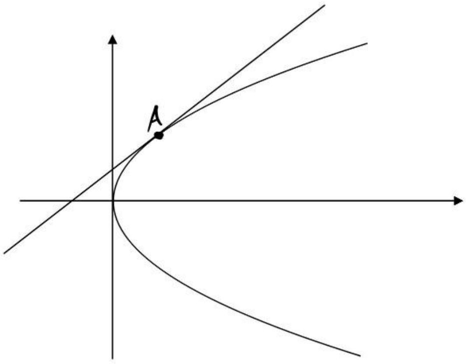
פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

קיץ תשפ"ו 2026, מועד א', שאלון 35572 (גרסה 05)

נכתב על-ידי רגב אס

שאלה 1

סעיף א'(1)



נתונה פרבולה $y^2 = 27x$, כלומר $p = \frac{27}{2} = 13.5$

מעבירים לפרבולה משיק ששיפועו $\frac{3}{4}$ בנקודה $A\left(\frac{y_A^2}{27}, y_A\right)$

נשתמש במשוואת המשיק לפרבולה: $yy_1 = p(x + x_1)$

ולאחר שנסדר אותה: $y = \frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2}$

נשווה בין השיפוע הנתון לביטוי של השיפוע ממשוואת המשיק:

$$\frac{p}{y_1} = \frac{3}{4}$$

נציב את ערך p ונמצא את y_A:

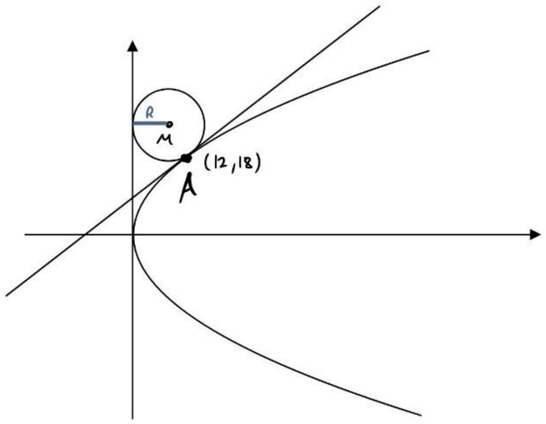
$$\frac{13.5}{y_A} = \frac{3}{4}$$

נפתור את המשוואה ונקבל:

$$y_A = 18$$

מכאן שערך הנקודה A:

$$A(12, 18)$$



<u>סעיף ב'(1)</u>

נתון מעגל המשיק לציר ה-y.

נקודה A היא גם נקודת השקה של המעגל עם המשיק.

מכאן שהרדיוס AM מאונך למשיק ושיפועו יהיה: $-\frac{4}{3}$.

נציב את הנקודה A שמצאנו ואת השיפוע במשוואת הישר:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-18=-\frac{4}{3}(x-12)$$

$$y=-\frac{4}{3}x+34$$

<u>סעיף ב'(2)</u>

מכיוון וערך x של מרכז המעגל קטן מערך ה-x של נקודת ההשקה A נוכל לקבוע כי המעגל נמצא מעל המשיק.

לפי משוואת הישר שמצאנו בסעיף ב'(1) נוכל להביע את מרכז המעגל M:

$$M\left(a,-\frac{4}{3}a+34\right)$$

ומשום שהמעגל משיק לציר ה-y אנו יודעים כי $R=a$ (a מימין לציר y).

בסך הכל נבטא את משוואת המעגל כך:

$$(x-R)^2+\left(y+\frac{4}{3}R-34\right)^2=R^2$$

ולבסוף נוכל להציב את הנקודה A שעל המעגל במשוואת המעגל ולמצוא את R:

$$(12-R)^2+\left(18+\frac{4}{3}R-34\right)^2=R^2$$

$$(12-R)^2+\left(\frac{4}{3}R-16\right)^2=R^2$$

$$R^2-24R+144+\frac{16}{9}R^2-\frac{128}{3}R+256=R^2$$

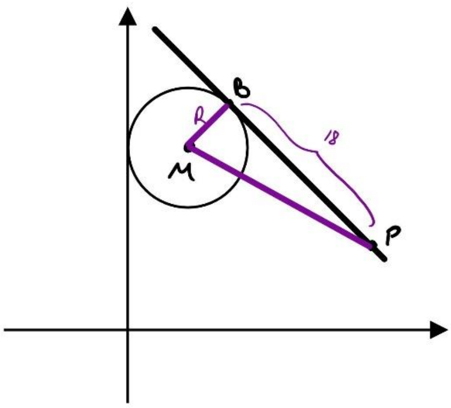
$$\frac{16}{9}R^2 - \frac{200}{3}R + 400 = 0$$

ונקבל שתי תשובות:

$$R_1 = 30\ ;\ R_2 = \frac{15}{2} = 7.5$$

ומכיוון ונתון כי $x_A < x_M$ התשובה הנכונה היא $R_2 = 7.5$.

ומשוואת המעגל: $(x-7.5)^2 + (y-24)^2 = \frac{225}{4}$



סעיף ג'(1)

נגדיר את הנקודה $P(t,k)$ ולפי הנתון כי אורך $BP = 18$

נוכל לבטא את הקשר בין t ל-k בעזרת משפט פיתגורס

במשולש MBP.

ראשית נביע את אורך MP בעזרת מרחק בין שתי נקודות:

$$MP = \sqrt{(7.5-t)^2 + (24-k)^2}$$

כעת נציב במשפט פיתגורס:

$$MB^2 + BP^2 = MP^2$$

$$(7.5)^2 + 18^2 = (7.5-t)^2 + (24-k)^2$$

נסדר את המשוואה ונקבל:

$$(7.5-t)^2 + (24-k)^2 = \frac{1521}{4}$$

כלומר, זהו מעגל שרדיוסו 19.5.

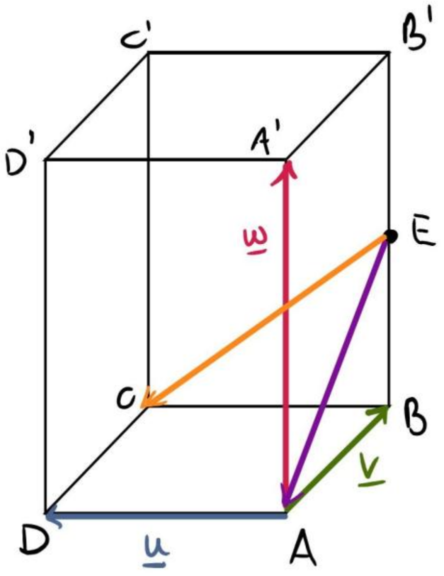
סעיף ג'(2)

מכיוון ורדיוס המעגל החדש הוא 19.5 אז שתי הנקודות הרחוקות ביותר זו מזו הן נקודות משתי צידי הקוטר והמרחק המקסימלי במעגל זה הוא 39 יחידות.

לכן, אין שתי נקודות על המקום הגיאומטרי שהמרחק ביניהן 40.

שאלה 2

סעיף א'



נביע את הוקטורים $\overrightarrow{EA}$ ואת $\overrightarrow{EC}$:

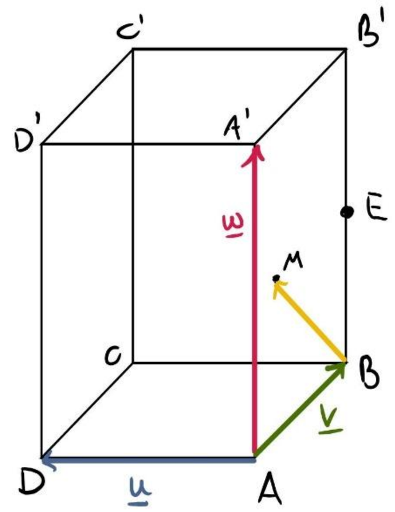
$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} =$$

$$\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\underline{w} - \underline{v}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{2}\underline{w} + \underline{u}$$

סעיף ב'



נביע את $\overrightarrow{EM}$ בעזרת הנתון $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}$

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{EM} = -\frac{1}{2}\underline{w} + \left(\frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}\right)$$

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} - \frac{5}{12}\underline{w}$$

סעיף ג'(1)

נתון: $\overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EC}$

נציב את הוקטורים $\overrightarrow{EA}$ ואת $\overrightarrow{EC}$ ונקבל:

$$\overrightarrow{EM} = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\underline{w} - \underline{v}\right) + b \cdot \left(-\frac{1}{2}\underline{w} + \underline{u}\right)$$

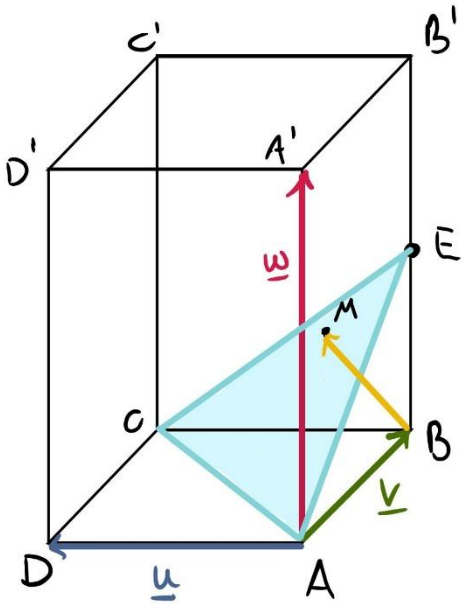
$$\overrightarrow{EM} = b \cdot \underline{u} - a \cdot \underline{v} - \frac{a+b}{2}\underline{w}$$

כעת נשווה את המקדמים לערכים שמצאנו בסעיף ב':

$$b = \frac{1}{6} \quad ; \quad a = \frac{2}{3}$$

סעיף ג'(2)

ניתן לדעת עוד לפי הנתון $\overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EC}$ כי $\overrightarrow{EM}$ הוא קומבינציה לינארית של שני וקטורים הפורסים את המישור AEC ולכן הנקודה M אכן במישור.



<u>סעיף ד'</u>

נתון כי $|\underline{w}| = 8$.

הוקטור $\overrightarrow{BM}$ מאונך למישור AEC כלומר הוא מאונך לשני וקטורים שאינם קו-לינארים (שאינם בעלי אותו כיוון) על המישור ומכפלתם הסקלרית תתאפס:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{EA} = 0 \end{cases}$$

נתבונן במכפלות הסקלריות ונמצא את $|\underline{u}|$ ואת $|\underline{v}|$.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\underline{w} + \underline{u}\right) = 0 \\ \left(\frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\underline{w} - \underline{v}\right) = 0 \end{cases}$$

מכיוון הוקטורים $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ הם מקצועות בתיבה אז הם מאונכים זה לזה ומקיימים:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

לכן המכפלות היחידות שיישארו הן המכפלות בין וקטור כלשהו לעצמו:

$$\begin{cases} -\frac{1}{24}\underline{w}^2 + \frac{1}{6}\underline{u}^2 = 0 \\ -\frac{1}{24}\underline{w}^2 + \frac{2}{3}\underline{v}^2 = 0 \end{cases}$$

נציב $|\underline{w}| = 8$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{24}\underline{w}^2 + \frac{1}{6}\underline{u}^2 = 0 \\ -\frac{1}{24}\underline{w}^2 + \frac{2}{3}\underline{v}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6}\underline{u}^2 = \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3}\underline{v}^2 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{u}^2 = 16 \\ \underline{v}^2 = 4 \end{cases}$$

ומכאן שאורכי הוקטורים הם:

$$|\underline{u}| = 4 \quad ; \quad |\underline{v}| = 2$$

<u>סעיף ה'</u>

המרחק בין הנקודה B למישור AEC הוא למעשה אורך הוקטור $\overrightarrow{BM}$ משום שהוא מאונך למישור:

$$|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}\right)^2}$$

שוב נוכל להתעלם מהמכפלות הסקלריות שמתאפסות ונקבל:

$$\sqrt{\frac{1}{36}\underline{u}^2 + \frac{4}{9}\underline{v}^2 + \frac{1}{144}\underline{w}^2}$$

נציב את האורכים שמצאנו (בריבוע):

$$\sqrt{\frac{16}{36} + \frac{16}{9} + \frac{64}{144}}$$

$$|\overrightarrow{BM}| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

שאלה 3

סעיף א'

נתונה המשוואה $z^3 = -216$

נסדר בתצוגה הקוטבית ונקבל את המשוואה $z^3 = 216 \cdot \text{cis}(180°)$ משום שהמספר המרוכב -216 נמצא על החלק השלילי של הציר הממשי.

נפתור את המשוואה:

$$z^3 = 216 \cdot \text{cis}(180°)$$

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{216} \cdot \text{cis}\left(\frac{180° + 360°k}{3}\right)$$

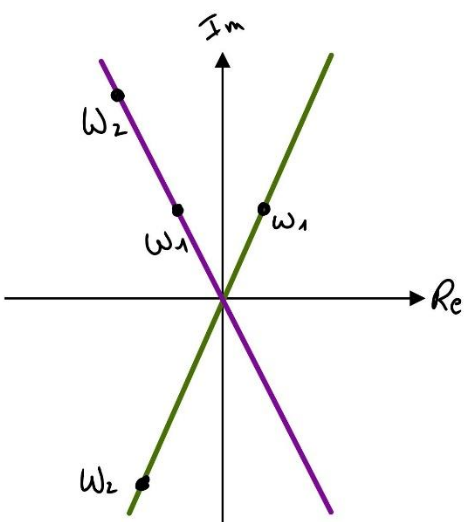
$$z_{1,2,3} = 6 \cdot \text{cis}(60° + 120°k)$$

$$z_1 = 6 \cdot \text{cis}(60°) \ \ ; \ \ z_2 = 6 \cdot \text{cis}(180°) \ \ ; \ \ z_3 = 6 \cdot \text{cis}(240°)$$

סעיף ב'

נתון: $w_1 = r \cdot \text{cis}\ (\alpha)$, $w_2 = 2r \cdot \text{cis}\ (4\alpha)$, $50° < \alpha < 130°$

שתי הנקודות המיוצגות על ידי w_1 ו-w_2 נמצאות על ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים, כלומר הפרש הזוויות ביניהם הוא $180°$ אם הן ברביעים שונים או $0°$ אם הן באותו רביע. **הערה:** יש לזכור להוסיף $360°k$ למשוואה.



נמצא את שתי האפשרויות של α:

$$4\alpha_1 - \alpha_1 = 180 + 360k$$

$$\alpha_1 = 60 + 120k$$

$$\alpha_1 = 60$$

והאפשרות השנייה, כאשר הנקודות באותו רביע:

$$4\alpha_2 = \alpha_2 + 360k$$

$$\alpha_2 = 120k$$

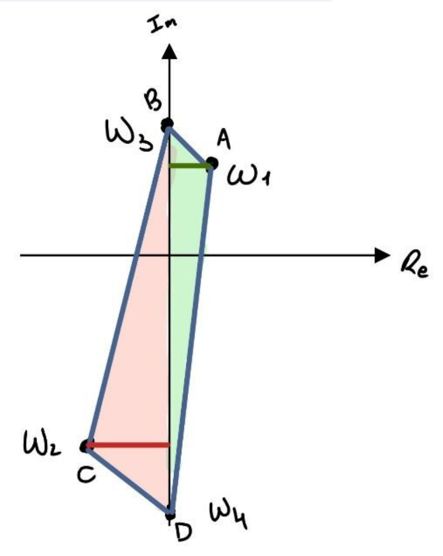
$$\alpha_2 = 120°$$

סעיף ג'

נתון כי w_1 הוא אחד הפתרונות מסעיף א'. הפתרון היחיד המתאים לפי ערכי α שמצאנו הוא $z_1 = 6 \cdot cis(60°)$.

מכאן נוכל לקבוע כי $r = 6 \;\; ; \;\; \alpha = 60°$

סעיף ד'



נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים:

$$w_3 = 6i = 6 \cdot cis(90°)$$

$$w_4 = \frac{12}{i} = \frac{12cis\,(0°)}{cis\,(90°)} = 12cis\,(-90°)$$

נשים לב ששני המספרים נמצאים על הציר המדומה.

לכן, נוכל לחשב בקלות את שטח המרובע ABCD

על ידי פירוק השטח לשני משולשים ABD ו-BCD.

הבסיס של משולשים אלו על הציר המדומה ואורכו הוא:

$$w_3 - w_4 = 6 - (-12) = 18$$

כדי למצוא את הגובה לכל אחד מהמשולשים (x_A ו-x_C) נעביר את הקודקודים לתצוגה אלגברית:

$$x_A = 6\cos(60°) = 3$$

$$x_C = 12\cos(240°) = -6$$

$$S_{ABD} = \frac{18 \cdot x_A}{2} = \frac{18 \cdot 3}{2} = 27$$

$$S_{CBD} = \frac{18 \cdot (-x_C)}{2} = \frac{18 \cdot 6}{2} = 54$$

ובסה"כ מחיבור השטחים נקבל:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD} = 27 + 54 = 81$$

<u>סעיף ה'</u>

נתון כי $\bar{u} + \frac{1}{u} = 10.1 \cdot cis(285°)$.

נחלק את הסעיף לשניים:

ראשית נמצא את הזווית המתאימה לנקודה E:

נתון כי u על חוצה הזווית BOA לכן נוכל לקבוע כי הזווית המתארת את u היא 75°,

זהו למעשה חיבור של הזווית המתארת את הנקודה A ועוד חצי מהזווית שבין A ל-B.

כעת נעבור לחישוב המרחק של u :

$$R + \frac{1}{R} = 10.1$$

$$R^2 + 1 = 10.1R$$

$$R^2 - 10.1R + 1 = 0$$

נקבל שני פתרונות עבור R:

$$R_1 = 10 \quad ; \quad R_2 = 0.1$$

מכיוון ונתון $1 < |u|$ אז התשובה המתאימה היא R_1.

בסה"כ קיבלנו:

$$u = 10 \cdot \mathrm{cis}(75°)$$

bennygoren.co.il

שאלה 4

סעיף א'

נתונה הפונקציה $f(x) = x^n \cdot (4 - \ln x)$, $x > 0$, n פרמטר טבעי.

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-x:

$$x^n \cdot (4 - \ln x) = 0$$

$$4 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 4$$

$$x = e^4$$

$$(e^4, 0)$$

הערה: הפתרון $x = 0$ אינו בתחום ההגדרה, אך נוכל לדעת כי מדובר בחור בפונקציה על ציר ה-x.

סעיף ב'

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא 3.

נתרגם את הנתון לכתיב מתמטי: $f'(1) = 3$

נגזור את הפונקציה ובעזרת הנתון נמצא את הערך של n:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}(4 - \ln x) + x^n \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = x^{n-1}\left[n \cdot (4 - \ln x) - x \cdot \frac{1}{x}\right]$$

$$f'(x) = x^{n-1}[n \cdot (4 - \ln x) - 1]$$

$$f'(1) = 1^{n-1}[n \cdot (4 - \ln 1) - 1] = 3$$

$$[n \cdot (4 - 0) - 1] = 3$$

$$4n - 1 = 3$$

$$4n = 4$$

$$n = 1$$

<u>סעיף ג'</u>

נציב $n = 1$ ונקבל את הפונקציה: $f(x) = x \cdot (4 - \ln x)$

נמצא את הקיצון של הפונקציה:

$$f'(x) = (4 - \ln x) - 1 = 3 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 3$$

$$x = e^3$$

נמצא את ערך y של נקודת הקיצון:

$$f(e^3) = e^3 \cdot (4 - \ln e^3) = e^3$$

$$(e^3\ , e^3)$$

כעת נמצא את סוג הקיצון בעזרת הנגזרת השנייה:

$$f'(x) = 3 - \ln x$$

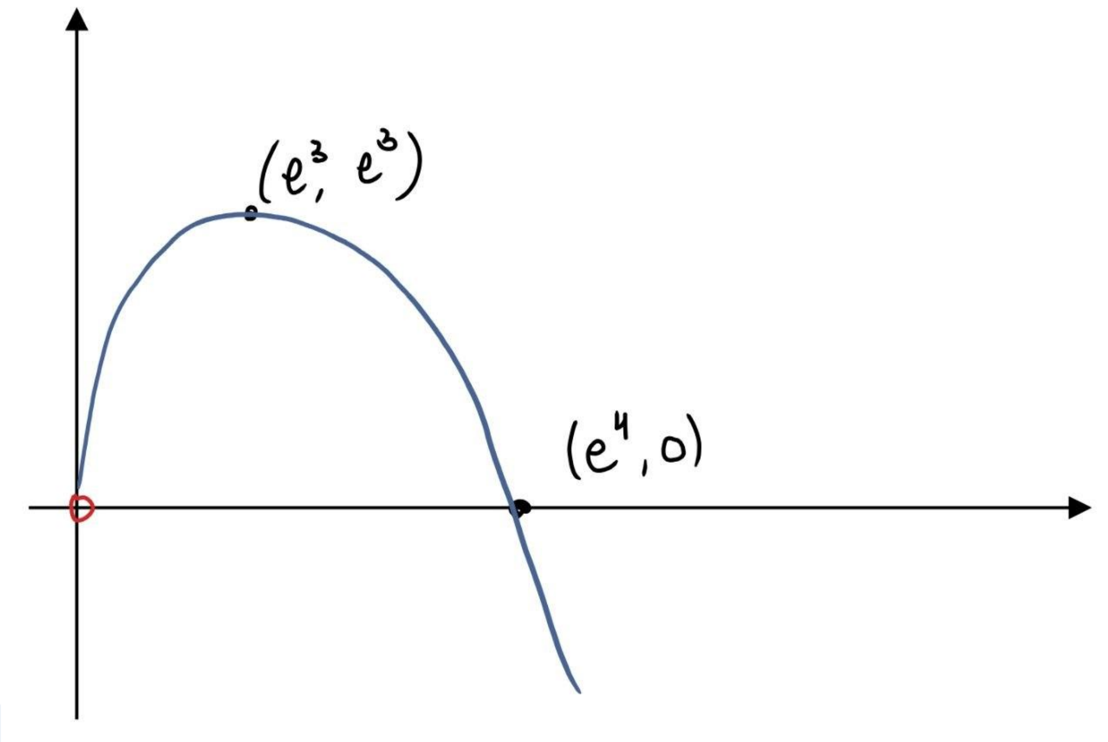
$$f''(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f''(e^3) = -\frac{1}{e^3} < 0$$

קיבלנו כי הנגזרת השנייה שלילית בנקודה $x = e^3$ לכן זהו קיצון מסוג מקסימום.

סעיף ד'

נסרטט את הפונקציה:



סעיף ה'(1)

נתונה פונקציה חדשה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

$g(x)$ יורשת את תחום ההגדרה של $f(x)$ ובנוסף הנקודות שבהן $f(x) = 0$ אינן מוגדרות בפונקציה $g(x)$:

$x > 0 \;, x \neq e^4$

סעיף ה'(2)

האסימפטוטות האנכיות של $g(x)$ מתקבלות כאשר $x = 0 \,, e^4$.

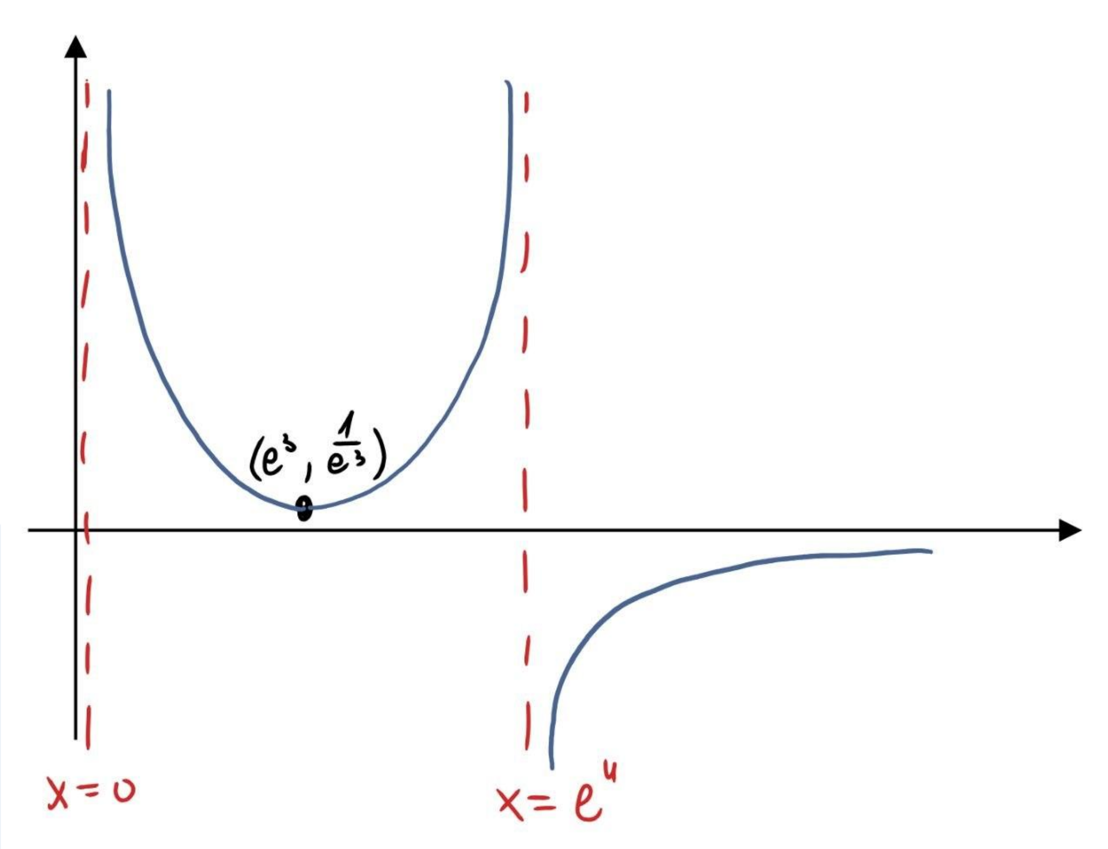
האסימפטוטה האופקית תהיה ב- $y = 0$ משום שהמכנה "חזק" מהמונה.

סעיף ה'(3)

נסרטט את הפונקציה לפי שני עקרונות:

(1) לשתי הפונקציות אותם תחומי חיוביות-שליליות.

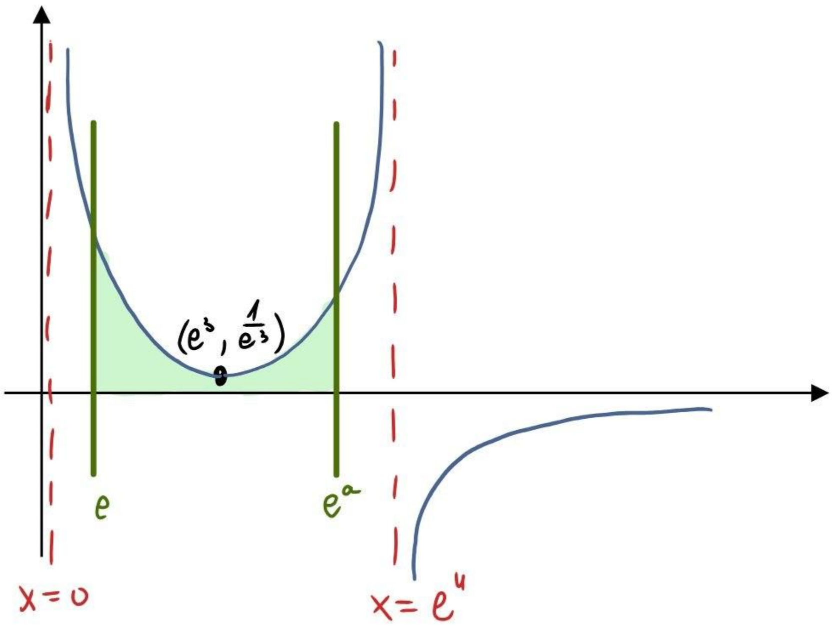
(2) לשתי הפונקציות תחומי עליה-ירידה הפוכים.



<u>סעיף ו'</u>

נתון: $1 < a < 4$

נבצע אינטגרל על הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון. נשים לב כי בתחום זה הפונקציה נמצאת מעל ציר ה-x.



לכן האינטגרל יהיה:

$$\int_{e}^{e^a} \frac{1}{x \cdot (4 - \ln x)} dx = \ln 12$$

נפריד את הביטוי שבאינטגרל כך שתתקבל מכפלה בין ביטוי אחד $(4 - \ln x)$ לביטוי שני שהוא הנגזרת של הביטוי הראשון $(-\frac{1}{x})$.

נוסיף סימן מינוס נוסף מחוץ לאינטגרל כדי לא לשנות את ערך הביטוי המקורי:

$$-\int_{e}^{e^a} -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4 - \ln x} dx$$

נסדר את האינטגרל כך שהנגזרת תהיה במונה:

$$-\int_{e}^{e^a} \frac{-\frac{1}{x}}{4-\ln x}\,dx$$

כעת הביטוי שלנו מתאים לנגזרת של פונקציית ln ונוכל לבצע את האינטגרל, להציב את הגבולות ולהשוות לערך הנתון:

$$-\ln[4-\ln x] \;=\; \ln 12$$

$$-\ln[4-\ln e^a] - (-\ln[4-\ln e]\,)$$

$$-\ln[4-a] + \ln 3 = \ln 12$$

נסדר את האגפים ונקבל:

$$\ln 3 - \ln 12 = \ln(4-a)$$

$$\ln\left(\frac{3}{12}\right) = \ln(4-a)$$

$$4 - a = \frac{1}{4}$$

$$a = 3\frac{3}{4}$$

שאלה 5

סעיף א'(1)

נתונה הפונקציה $f(x) = 5e^x - x + 16 \cdot \ln(5 - e^x)$.

נמצא את תחום ההגדרה לפי הביטוי שבתוך הלוגריתם:

$$5 - e^x > 0$$

$$e^x < 5$$

$$x < \ln 5$$

סעיף א'(2)

אסימפטוטה אנכית של הפונקציה תהיה ב- $x = \ln 5$.

לפונקציה לא יהיו אסימפטוטות אופקיות משום שהביטוי $(-x)$ אינו מתכנס.

סעיף ב'

נגזור את הפונקציה ונסדר את הנגזרת:

$$f'(x) = 5e^x - 1 + 16 \cdot \frac{-e^x}{5 - e^x}$$

$$f'(x) = 5e^x - 1 - \frac{16e^x}{5 - e^x}$$

$$f'(x) = \frac{(5e^x - 1)(5 - e^x)}{5 - e^x} - \frac{16e^x}{5 - e^x}$$

$$f'(x) = \frac{25e^x - 5e^{2x} + e^x - 5 - 16e^x}{5 - e^x}$$

$$f'(x) = \frac{-5e^{2x} + 10e^x - 5}{5 - e^x} = \frac{-5[e^{2x} + 2e^x - 1]}{5 - e^x}$$

$$f'(x) = \frac{-5(e^x - 1)^2}{5 - e^x}$$

סעיף ג'(1)

נשים לב כי הנגזרת של הפונקציה בעלת מונה שלילי תמיד ובתחום ההגדרה שלנו המכנה יהיה חיובי תמיד (זהו הביטוי שהיה בתוך ה $\ln$ בפונקציה $f(x)$).

כלומר, הנגזרת אינה חיובית בתחום הגדרתה והפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה!

תחום עליה: אין.

תחום ירידה: $x < \ln 5$

סעיף ג'(2)

כדי למצוא את משוואת המשיק לפונקציה המקביל לציר ה-x יש למצוא את הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת.

נסתכל על המונה של הנגזרת:

$$-5(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$x = 0$$

כעת נמצא את ערך הפונקציה בנקודה זו:

$$f(0) = 5e^0 - 0 + 16 \cdot \ln(5 - e^0)$$

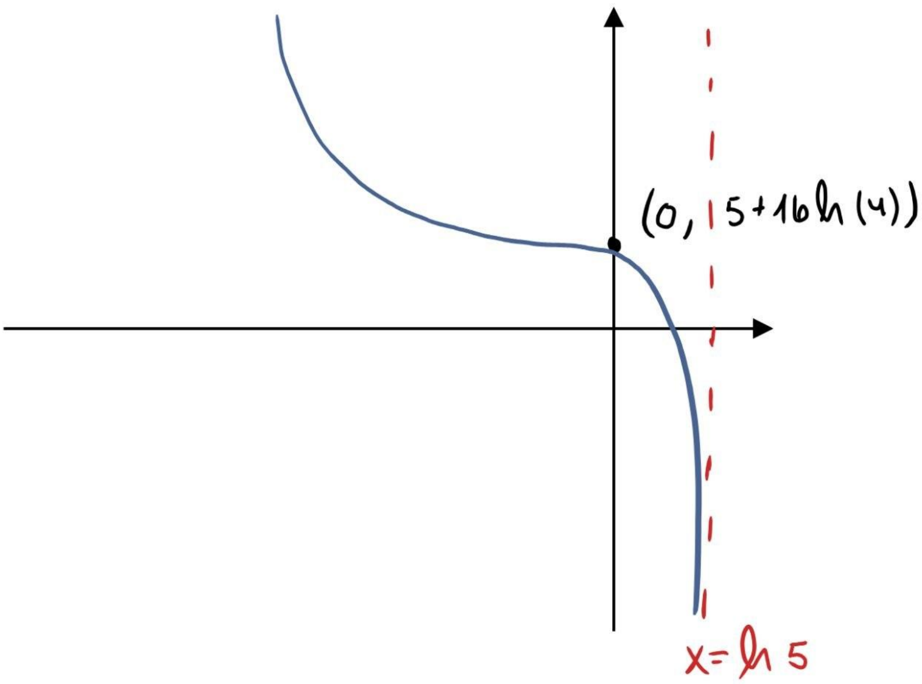
$$f(0) = 5 + 16 \cdot \ln(4) \ \sim 27.18$$

משוואת המשיק היא:

$$y = 27.18$$

<u>סעיף ד'</u>

סרטוט הפונקציה:



<u>סעיף ה'(1)</u>

האסימפטוטות של הנגזרת $f'(x) = \frac{-5(e^x-1)^2}{5-e^x}$:

אסימפטוטה אנכית תתקבל ב- $x = \ln 5$, בנקודה זו המכנה מתאפס.

נבדוק האם יש אסימפטוטה אופקית כאשר $x \to -\infty$

(בצד החיובי הנגזרת אינה מוגדרת).

נזכור גם כי הביטוי $e^{-\infty}$ שואף לאפס.

$$\frac{-5(e^{-\infty}-1)^2}{5-e^{-\infty}} = \frac{-5(0-1)^2}{5} = -1$$

קיבלנו כי לפונקציה אסימפטוטה אופקית ב- $y = -1$.

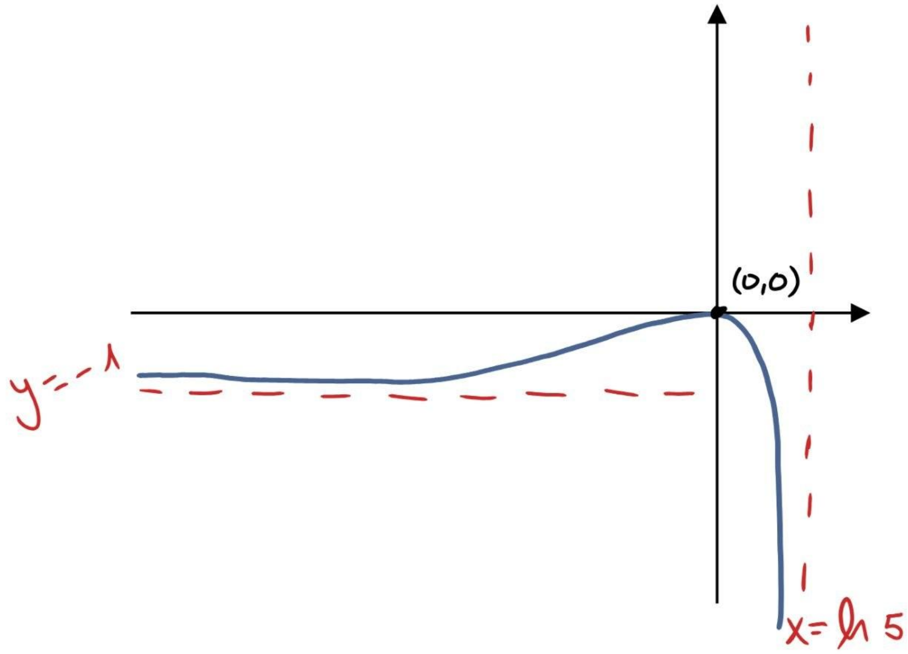
סעיף ה'(2)

נסרטט את הנגזרת בעזרת הנתון כי לפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול יחידה, כלומר לנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

גילינו כבר בסעיף ג'(2) כי הנגזרת מתאפסת כאשר $x = 0$.

זאת אומרת שהנגזרת עוברת בראשית הצירים ובשאר הזמן היא שלילית.

נקודה זו חייבת להיות נקודת הקיצון היחידה של הנגזרת:



סעיף ו'

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + ax$. a הוא פרמטר.

נגזור את הפונקציה $g(x)$:

$$g'(x) = f'(x) + a$$

קיבלנו כי הנגזרת של $g(x)$ היא למעשה הזזה אנכית של $f'(x)$.

בעת עלינו למצוא את תחום הערכים של a שעבורו הנגזרת $g'(x)$ חותכת פעמיים את ציר ה-x, כלומר כאשר $0 < a < 1$.